MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY †
G. HERGLOTZ H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

51. BAND 5. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 30. DEZEMBER 1948)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1949

Math.
Z.

Preis M 14.80

Die MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),
F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

51. Band. **Inhalt:** 5. Heft.

Seite

Strubecker, Prof. Dr. K., Karlsruhe, Gneisenaustr. 2: Differentialgeometrie des isotropen Raumes, V. Zur Theorie der Eilinien 525

Heuser, Dr. P., Dieburg, Spitalstr. 29: Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome 574

Grunsky, Dr. H., Trossingen (Württ.), Tuttlingerstr. 14: Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. III. Ein Einzigkeitssatz 586

Kappos, Dr. D. A., Erlangen, Stafflweg 6, Mathematisches Seminar: Ein Beitrag zur Carathéodoryschen Definition der Ortsfunktionen in Booleschen Algebren 616

Differentialgeometrie des isotropen Raumes, V. Zur Theorie der Eilinien.

Von

K. Strubecker in Karlsruhe.

Inhaltsübersicht.

I. Einleitung 525
II. Die parataktische Abbildung der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare (E_l, E_r) der Ebene 526
III. Die parataktische Abbildung von Kurvenstreifen 531
IV. Isotrope Differentialgeometrie der Kurvenstreifen 534
V. Differentialgeometrie der parataktischen Streifenbilder 538
VI. Der Vierscheitelsatz der relativen Differentialgeometrie 543
VII. Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Paare flächengleicher Eilinien 547
VIII. Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Paare isometrischer, umfangsgleicher Eilinien 548
IX. Eilinien und Flächen der festen isotropen Relativkrümmung $K = rt - s^2 = -1$ 554
X. Das Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung 559
XI. E. Studys Schwenkungsverfahren. Anwendung auf Eilinien. Gleichdicke und Zindler-Kurven 564
XII. Räumliche Ableitung zweier kennzeichnender Eigenschaften des Kreises 571

I. Einleitung.

Man kennt in der Ebene eine Reihe von Theoremen aus der Gruppe der Vierscheitelsätze, welche sich auf die Krümmungsverhältnisse von Paaren von Eilinien beziehen. Der Vierscheitelsatz der relativen Differentialgeometrie ist das bekannteste Beispiel dafür. Im folgenden wird gezeigt, daß es mittels der Methoden der isotropen Differentialgeometrie möglich ist, Theoreme der genannten Art aus räumlichen Vierscheitelsätzen über Kurvenstreifen zu gewinnen.

Darüber hinaus führe ich zu jeder Eilinie c eine bemerkenswerte Fläche Φ der festen isotropen Relativkrümmung $K = rt - s^2 = -1$ ein, die c als Rückkehrkante hat und sich periodisch über der Ebene von c erhebt, durch deren isotrope Differentialgeometrie es gelingt, ebene Probleme um die Eilinie c auf isotrop-räumlichen Wege zu lösen. Um hier nur ein Beispiel der dabei auftretenden interessanten Übertragungen anzuführen, sei erwähnt, daß etwa der bekannte räumliche

Satz von Joachimsthal *über die ebenen Krümmungslinien ein* *Fläche* Φ in der Ebene den folgenden Satz (von E. Salkowski) üb Eilinien liefert:

„*Kann man in einer Eilinie (ohne Mittelpunkt) eine Sehne herumführen, daß zwei der folgenden Eigenschaften erfüllt sin 1. Die Sehne hat feste Länge, 2. sie schneidet feste Bogenstücke a 3. sie schneidet feste Flächenstücke ab, so gilt auch die dritt Eigenschaft*".

Weiter wird die altbekannte Geometrie der Kurven fester Breit (Gleichdicke) durch ein hier räumlich gewonnenes, in der Ebene scho von E. Study benütztes Übertragungsverfahren mit der eigentlic erst in den letzten Jahren entwickelten Theorie der sogenannten Zindle kurven (= Kurven mit einer Schar von Flächen- und Umfangshalbierende Sehnen fester Länge) in Beziehung gesetzt. Das zugehörige räum liche Verfahren der „Elementenschwenkung" hat insbesondere fü die isotrope Differentialgeometrie der Pfaffschen Mannigfaltig keiten von Flächenelementen (anholonomen Flächen des isotrope Raumes) Bedeutung, der eine spätere Arbeit dieser Reihe gewidmet sei wird.

Das in der Arbeit laufend benutzte geometrische *Übertragungsprinzi* besteht in der sogenannten *parataktischen Abbildung* des isotropen Rau mes, durch welche die *Punktepaare* (E_l, E_r) *der Ebene* auf die *Flächen elemente E des isotropen Raumes* abgebildet werden. Zur Bequemlichkei des Lesers ist einleitend kurz über diese Abbildung und über einig später notwendige Tatsachen und Formeln aus der isotropen Diffe rentialgeometrie[1]) berichtet worden, so daß die Arbeit ohne weiteres fü sich allein lesbar ist.

II. Die parataktische Abbildung der Flächenelemente E des isotropen Raumes auf die Punktepaare (E_l, E_r) der Ebene.

1. Die Bewegungsgruppe des isotropen Raumes. Cliffordscher Paralle lismus. Parataxie. Als *Geometrie des isotropen Raumes* erklären wir in Sinne von F. Klein die Invariantentheorie der sechsgliedrigen Gruppe G

$$G_6 \begin{cases} x' = a + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = b + x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = c + c_1 x + c_2 y + z \end{cases} \tag{1}$$

[1]) Ausführliche und allgemeine Entwicklungen der genannten Gegenständ enthalten meine unter dem gemeinsamen Obertitel „*Differentialgeometrie des iso tropen Raumes*" erschienenen früheren Arbeiten: I. Theorie der Raumkurven Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien, Abt. II a, **150** (1941), S. 1—53. — II. Die Fläche konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$. Math. Zeitschr. **47** (1942), S. 743—777. — III. Flächentheorie. Math. Zeitschr. **48** (1942), S. 369—427. — IV. Theorie der flächen treuen Abbildungen der Ebene. Math. Zeitschr. **50** (1944), S. 1—92. — Die Ent

on projektiven Automorphien des Ferngeradenpaares

2) $$\begin{cases} t = 0 \\ x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

as als *absolutes Geradenpaar* unseres isotropen Raumes fungiert. Wir ezeichnen die Transformationen der Gruppe (1) als die *Bewegungen* es isotropen Raumes; sie äußern sich im Grundriß (Normalriß auf die x, y-Ebene) als gewöhnliche ebene Bewegungen. Das isotrope *Bogenlement* ds hat daher die Form

3) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \mathrm{I}.$$

Der isotrope Raum wird also beherrscht von jener (einfachsten) RIEMANNschen Metrik, welche sich im Grundriß als die gewöhnliche EUKLIDische Metrik *äußert.* Z. B. kann der isotrope Winkel zweier Vektoren direkt ihrem Grundrisse entnommen werden, insonderheit ind im isotropen Sinne normale Raumvektoren solche, deren Grundrisse normal sind.

In der Gruppe G_6 ist für $\varphi = 0$ invariant die fünfgliedrige Gruppe G_5 ler isotropen *Grenzbewegungen* enthalten, welche sich im Grundriß als bene Parallelverschiebungen äußern. Durch sie werden die Flächenlemente $E(x, y, z, p, q)$ des isotropen Raumes in einfachtransitiver Weise ntereinander vertauscht.

Man kann die Grenzgruppe G_5 darstellen als das kommutative Produkt zweier dreigliedriger isotroper Schiebungsgruppen S_l^3, S_r^3

4) $$G_5 = S_l^3 . S_r^3 = S_r^3 . S_l^3,$$

nämlich der Gruppen der

Linksschiebungen	Rechtsschiebungen
5) $S_l^3 \begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = \beta + y \\ z' = \gamma - \beta x + \alpha y + z \end{cases}$	$S_r^3 \begin{cases} x' = \alpha + x \\ y' = \beta + y \\ z' = \gamma + \beta x - \alpha y + z. \end{cases}$

Diese Schiebungen sind im isotropen Raume ein Gegenstück der CLIFFORDschen Schiebungen des elliptischen und quasielliptischen Raumes. Die Bahnen ihrer eingliedrigen Untergruppen sind geradlinig und bilden parabolische Strahlnetze der Gleichungen

6) $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} + p_{12} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p_{01} & p_{02} & p_{03} - p_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

wicklung der algebraischen und gruppentheoretischen Eigenschaften der parataktischen Abbildung ist in meiner Note „Über die parataktische Abbildung der Flächenelemente des Raumes auf die Punktepaare einer Ebene" Crelles Journ. f. r. u. a. Math. **186**, Heft 3 (1945) S. 1—36 enthalten.

Über die Gegenstände der vorliegenden Note habe ich im Jänner 1944 in Freiburg (Br.) und im Juli 1944 in Heidelberg vorgetragen.

2. Parataxien und parataktische Abbildung. Ähnlich den gewöhnlichen Parallelverschiebungen vermitteln auch diese isotropen Cliffordschen Schiebungen *eine Art von Parallelismus* zwischen je ∞^3 Flächenelementen des isotropen Raumes, die wir als *Parataxie* bezeichnen. Genauer wollen wir sagen:

Satz 1. *Linksparataktische Flächenelemente des isotropen Raumes sind solche, welche durch Rechtsschiebung auseinander entstehen, rechtsparataktisch aber sollen solche Flächenelemente heißen, welche durch Linksschiebungen zusammenhängen.*

Diese Parataxien geben zu einer *parataktischen Abbildung* der Flächenelemente $E(x, y, z, p, q)$ des isotropen Raumes zunächst auf die Paare von Flächenelementen E_l, E_r der Bildebene π

$$\pi \ldots z = 0 \tag{7}$$

Anlaß durch die Forderung, daß E_l aus E durch Rechtsschiebung S_r hervorgehe, also zu E linksparataktisch sei, während E_r aus E durch Linksschiebung S_l entsteht, also zu E rechtsparataktisch ist. Man kann die Flächenelemente E_l, E_r in π umkehrbareindeutig durch ihre Punkte gleichen Namens ersetzen und erhält so die folgenden *Formeln* für die *parataktische Abbildung der Flächenelemente* $E(x, y, z, p, q)$ *des isotropen Raumes auf die Punktepaare* $E_l(x_l, y_l)$, $E_r(x_r, y_r)$ *der Ebene* π:

$$E_l \begin{cases} x_l = x + q \\ y_l = y - p \end{cases} \qquad E_r \begin{cases} x_r = x - q \\ y_r = y + p \end{cases} \tag{8}$$

oder umgekehrt

$$E \begin{cases} x = \dfrac{x_l + x_r}{2} & p = \dfrac{y_r - y_l}{2} \\ y = \dfrac{y_l + y_r}{2} & q = \dfrac{x_l - x_r}{2} \\ z = \text{beliebig.} \end{cases} \tag{9}$$

Diese Abbildung ist unempfindlich gegen Translationen in z-paralleler (vollisotroper) Richtung. E_l heißt das linke, E_r das rechte parataktische Bild des Flächenelementes E.

Aus (9) folgt

Satz 2. *Der Grundriß* $\overline{E}(x, y)$ *des Flächenelementes* E *ist der Mittelpunkt der beiden parataktischen Bildpunkte:*

$$\overline{E} = \frac{E_l + E_r}{2}. \tag{10}$$

3. Gruppentheoretische und elementare Eigenschaften der parataktischen Abbildung. Aus der Definition der parataktischen Abbildung folgt unmittelbar (Fig. 1):

Satz 3. *Bei einer Rechtsschiebung* S_r *des isotropen Raumes bleiben die linken Bilder* E_l *der Flächenelemente* E *in Ruhe, während die rechten*

Bilder E_r eine Translation $2\mathfrak{R}$ erfahren, unter $\mathfrak{R}$ die Grundrißwirkung der Rechtsschiebung S_r verstanden. Umgekehrt bleiben bei einer Linksschiebung S_l die rechten Bilder E_r in Ruhe, während die linken Bilder eine Translation $2\mathfrak{L}$ erfahren, unter $\mathfrak{L}$ die Grundrißwirkung von S_l verstanden.

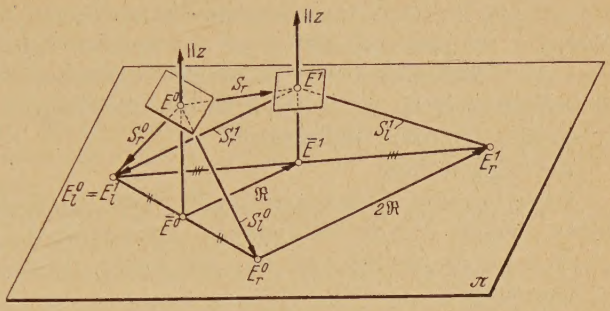

Fig. 1.

Die Gruppe $G_5 = S_l^3 . S_r^3$ der Grenzbewegungen des isotropen Raumes bildet sich daher parataktisch auf die Gruppe G_4 der simultanen Translationen des linken und rechten Bildfeldes ab.

Ferner gilt

Satz 4. *Eine allgemeine isotrope Bewegung (1) äußert sich in den parataktischen Bildern als Paar simultaner gleichwinkeliger Drehungen.*

Zwei von einander unabhängige simultane Drehungen der beiden Bildfelder sind dagegen das parataktische Abbild einer isotropen Lie*schen Kugeltransformation, d. h. einer Berührungstransformation, welche die isotropen Kugeln*

$$z = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D \tag{11}$$

d. h. die Flächen zweiter Ordnung durch das absolute Geradenpaar (2) untereinander vertauscht.

Die parataktische Abbildung liefert ein *Übertragungsprinzip*, das für die Geometrie des isotropen Raumes vor allem deshalb von Bedeutung ist, weil es die *metrischen Invarianten des isotropen Raumes* durch die *elementaren Invarianten der beiden Bildfelder* auszudrücken gestattet. Z. B. wird die Differentialgeometrie der Kurvenstreifen c des isotropen Raumes auf die elementare Differentialgeometrie der aufeinander bezogenen Kurvenpaare (c_l, c_r) der Ebene π übertragen.

Trägt man in die Inzidenzrelation

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{12}$$

die von E_l bzw. E_r stammenden Werte von p und q ein, so erhält man als die Mannigfaltigkeiten der Flächenelemente E des isotropen Raumes, deren linker bzw. rechter Bildpunkt $E_l(x_l, y_l)$ bzw. $E_r(x_r, y_r)$ *fest* ist, die Flächenelemente der

Linksgewinde $\mathfrak{G}_l$	Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$
$dz = -(x\,dy - y\,dx) - y_l\,dx + x_l\,dy,$	$dz = (x\,dy - y\,dx) + y_r\,dx - x_r\,dy,$

(13)

welche zwei involutorische Gewindebündel bilden. Ihre isotrope Beweglichkeit ist erstaunlich groß, nämlich viergliedrig. Insbesondere gilt der

Satz 5. *Die Flächenelemente jedes Linksgewindes $\mathfrak{G}_l$ werden durch die Gruppe der Rechtsschiebungen S_r^4 in einfach-transitiver Weise untereinander vertauscht, sie sind zueinander linksparataktisch. Ebenso sind die Flächenelemente jedes Rechtsgewindes $\mathfrak{G}_r$ zueinander rechtsparataktisch d. h. sie werden durch die Gruppe der Linksschiebungen S_l^3 einfach-transitiv vertauscht.*

Es folgt daraus

Satz 6. *Die Flächenelemente eines Linksgewindes und nur sie haben festen linken Bildpunkt; ebenso haben die Flächenelemente eines Rechtsgewindes und nur sie festen rechten Bildpunkt.*

Ferner gilt

Satz 7. *Das Nullsystem eines Linksgewindes äußert sich im linken parataktischen Bildfelde als die Spiegelung an seinem festen linken Bildpunkte, während die rechten Bilder unberührt bleiben. Entsprechend wirkt sich das Nullsystem eines Rechtsgewindes im rechten Bildfelde als Spiegelung an seinem festen rechten Bildpunkte aus, während das linke Bildfeld unberührt bleibt.*

Ist

$$\text{(14)} \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s)\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}\Big\} \bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(s)$$
$$\qquad\qquad\quad \begin{cases} p = p(s) \\ q = q(s) \end{cases}\Big\} \bar{\mathfrak{X}} = \bar{\mathfrak{X}}(s)$$

der Schmiegstreifen einer Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$, so entspricht dem isotropen Bogenelemente (3) in der *metrischen Dualität* des isotropen Raumes der Kontingenzwinkel $d\sigma$ ihrer Schmiegebenen

$$\text{(15)} \qquad d\sigma^2 = dp^2 + dq^2.$$

Bezeichnet

$$\text{(16)} \qquad \varkappa = [\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}''] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$

die isotrope *Krümmung* und

$$\text{(17)} \qquad \tau = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{[\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''']}{[\bar{\mathfrak{x}}'\bar{\mathfrak{x}}'']^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}$$

die isotrope *Torsion* der Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$, so ist $\frac{1}{\tau}$ metrisch dual zu τ. Da die Nullsysteme der Gewinde (13) jede metrische Größe in eine wertegleiche d u a l e Größe überführen, folgt

Satz 8. *Die in den Links- bzw. Rechtsgewinden (13) enthaltenen Schraubenlinien (und nur sie) haben die konstante isotrope Torsion* $\varkappa = -1$ *bzw.* $\varkappa = +1$.

Wir fügen noch einige elementare Bemerkungen an:

Bemerkung 1. Die Flächenelemente E der *Bildebene* π (und alle dazu parallelen Flächenelemente) haben *zusammenfallende parataktische Bildpunkte* $E_l = E_r$.

Bemerkung 2. Die Flächenlemente E einer *beliebigen* (nichtisotropen, d. h. nicht zur z-Achse parallelen) *Ebene* γ haben zwei *schiebungskongruente Bildfelder*; denn jede solche Ebene γ kann durch isotrope CLIFFORDsche Schiebung in die Bildebene π übergeführt werden.

Bemerkung 3. Spiegelt man ein Flächenelement E an der Bildebene π, so vertauschen sich seine beiden parataktischen Bilder.

Bemerkung 4. Der isotrope *Neigungswinkel* ϑ eines Flächenelementes E gegen die Bildebene π ist gleich dem halben Abstande seiner beiden parataktischen Bilder:

$$\vartheta^2 = p^2 + q^2 = \left(\frac{E_l E_r}{2}\right)^2. \tag{18}$$

Bemerkung 5. Die Flächenelemente E einer *isotropen Kugel* (11) haben parataktische Bilder E_l, E_r welche durch *Drehung* um den festen Winkel α zusammenhängen, wobei

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = A \tag{19}$$

ist. Das *Drehungszentrum* fällt dabei mit dem identischen Bildpaar jenes Flächenelementes der Kugel zusammen, welches zur Bildebene parallel ist.

III. Die parataktische Abbildung von Kurvenstreifen.

4. Allgemeine Eigenschaften. Irgend zwei aufeinander bezogene Kurven $c_l \to c_r$ können (einmal stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt) stets als parataktische Bilder eines Kurvenstreifens des isotropen Raumes aufgefaßt werden. Es ist nämlich, wenn die Koordination der Bildpaare $E_l(x_l, y_l)$ und $E_r(x_r, y_r)$ als Funktionen eines Parameters t gegeben sind, durch die aus (9) fließenden Gleichungen

$$\mathfrak{x}(t)\begin{cases} x = \dfrac{x_l + x_r}{2} & p = \dfrac{y_r - y_l}{2} \\ y = \dfrac{y_l + y_r}{2} & q = \dfrac{x_l - x_r}{2} \\ z = \displaystyle\int_{t_0}^{t} p\,dx + q\,dy \end{cases} \tag{20}$$

der Streifen vollkommen (bis auf vollisotrope d. h. z-parallele Schiebungen eindeutig) festgelegt.

Man kann das letzte Integral zum Teil ausführen und findet eine einfache *elementargeometrische Konstruktion der Streifenkurve* $\mathfrak{x}(t)$ aus den beiden parataktischen Bildkurven $\mathfrak{x}_l(t)$ und $\mathfrak{x}_r(t)$. Setzt man

nämlich in das Integral für p, q, dx und dy ihre Werte aus (20) ein so erhält man

$$z = \tfrac{1}{4}\int_{t_0}^{t} [(y_r\,dx_l + x_l\,dy_r) - (x_r\,dy_l + y_l\,dx_r) + (x_l\,dy_l - y_l\,dx_l) - (x_r\,dy_r - y_r\,dx_r)]$$

$$= \tfrac{1}{4}[x_l y_r - x_r y_l]_{t_0}^{t} + \tfrac{1}{4}\int_{t_0}^{t}(x_l\,dy_l - y_l\,dx_l) - \tfrac{1}{4}\int_{t_0}^{t}(x_r\,dy_r - y_r\,dx_r),$$

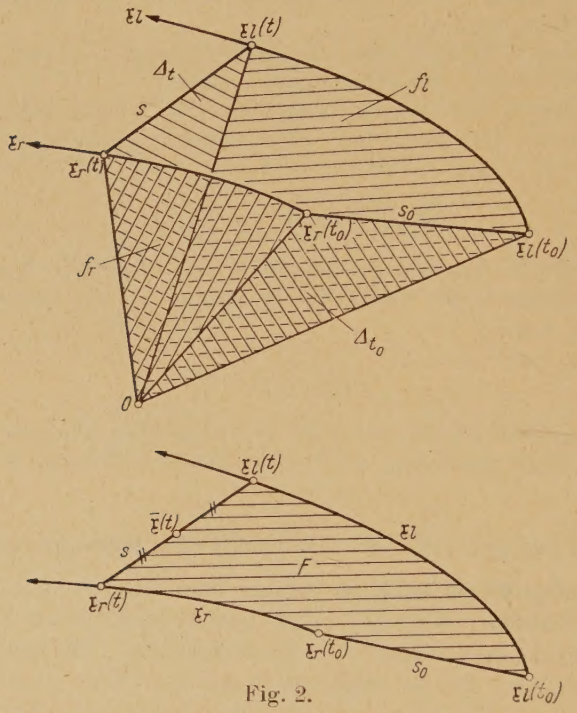

Fig. 2.

das heißt (vgl. Fig. 2):

(21) $$\boxed{z = \tfrac{1}{2}(\Delta_t - \Delta_{t_0} + f_l - f_r) = \tfrac{1}{2}F,}$$

wenn Δ_{t_0} und Δ_t die Flächen der Dreiecke $(O, \mathfrak{x}_l(t_0), \mathfrak{x}_r(t_0))$ und $(O, \mathfrak{x}_l(t), \mathfrak{x}_r(t))$ bedeuten, und f_l bzw. f_r die Flächen der Kurvensektoren $(O, \mathfrak{x}_l(t_0), \mathfrak{x}_l(t))$ bzw. $(O, \mathfrak{x}_r(t_0), \mathfrak{x}_r(t))$. Es ist also z insgesamt gleich der halben Fläche F des Sektors, der einerseits begrenzt wird von den beiden parataktischen Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$, andererseits von der Anfangssehne s_0, welche die Anfangspunkte $\mathfrak{x}_l(t_0)$ und $\mathfrak{x}_r(t_0)$ verbindet, und der Endsehne s, welche die Endpunkte $\mathfrak{x}_l(t)$ und $\mathfrak{x}_r(t)$ verbindet. Es folgt daraus

Satz 9. *Um die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ des Streifens zu konstruieren, dessen parataktische Bilder zwei aufeinander bezogene vorgegebene Kurven*

$\mathfrak{x}_l(t), \mathfrak{x}_r(t)$ *sind, wähle man eine beliebige Anfangssehne* s_0, *welche zwei zusammengehörige Punkte* $\mathfrak{x}_l(t_0)$ *und* $\mathfrak{x}_r(t_0)$ *verbindet; trägt man dann im Mittelpunkte* $\bar{\mathfrak{x}}(t) = \frac{\mathfrak{x}_l(t) + \mathfrak{x}_r(t)}{2}$ *der variablen Endsehne* $s = [\mathfrak{x}_l(t), \mathfrak{x}_r(t)]$ *in der z-Richtung als Höhe die halbe Fläche* $\frac{1}{2}F$ *des durch die Sehne zwischen* $\mathfrak{x}_l$ *und* $\mathfrak{x}_r$ *überstrichenen Sektors auf, so erhält man die gesuchte Streifenkurve.*

Von Bedeutung ist für uns der Sonderfall, wo die beiden parataktischen Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ des Streifens *geschlossen* und *periodisch aufeinander bezogen* sind, d. h., wo

(22) $$\mathfrak{x}_l(t+\tau) = \mathfrak{x}_l(t), \quad \mathfrak{x}_r(t+\tau) = \mathfrak{x}_r(t)$$

ist. Ist F_l die Fläche der linken, F_r die Fläche der rechten Bildkurve, so wird sich bei jedem Umlauf der beiden Bildkurven die Höhe z um den konstanten Wert

(23) $$\boxed{h = \frac{F_l - F_r}{2}}$$

vergrößern. Es folgt

Satz 10. *Zu zwei geschlossenen und periodisch aufeinander bezogenen Bildkurven* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *gehört im isotropen Raume ein Streifen, der sich periodisch über der Mittenkurve*

(24) $$\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}_l + \mathfrak{x}_r}{2}$$

der Zuordnung $\mathfrak{x}_l \to \mathfrak{x}_r$ *erhebt und dessen Ganghöhe* h *nach* (23) *gleich ist der halben Differenz der Flächeninhalte der Kurven* $\mathfrak{x}_l$ *und* $\mathfrak{x}_r$.

Der Streifen ist daher stets dann und nur dann ebenfalls geschlossen, wenn seine beiden (geschlossenen und periodisch aufeinander bezogenen) Bildkurven flächengleich ($F_l = F_r$) *sind.*

5. Einige Beispiele werden für uns von besonderer Bedeutung sein.

Beispiel 1. Artet eine der beiden parataktischen Bildkurven, z. B. $\mathfrak{x}_l$ in einen festen Punkt E_l aus, so sind alle Flächenelemente E des Streifens zueinander linksparataktisch und liegen in einem bestimmten Linksgewinde $\mathfrak{G}_l$ (Satz 6), der Streifen selber aber ist (nach Satz 8) Schmiegstreifen einer Kurve der festen Torsion $\tau = -1$ (Gewindekurve aus $\mathfrak{G}_l$). Entsprechendes gilt für Schmiegstreifen der festen Torsion $\tau = +1$, deren rechtes Bild $\mathfrak{x}_r$ punktförmig ist.

Aus Satz 10 folgt, daß eine solche Gewindekurve dann und nur dann geschlossen ist, wenn ihre nicht punktförmige parataktische Bildkurve eine geschlossene Linie mit verschwindender Fläche ist.

Beispiel 2. Fallen die parataktischen Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ Punkt für Punkt zusammen ($\mathfrak{x}_l = \mathfrak{x}_r$), so liegt der ebene Schmiegstreifen einer Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_l = \mathfrak{x}_r$ der Bildebene π vor.

Sind die Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ aber schiebungskongruent, so stellen sie einen ebenen Schmiegstreifen in einer von π verschiedenen nichtisotropen Ebene γ dar.

Beispiel 3. Allgemeiner sind zwei *drehungskongruente Kurven* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ die parataktischen Bilder eines *sphärischen Streifens*, der geschlossen ist, wenn $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ geschlossen sind.

Beispiel 4. Haben die Bild*paare* $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ der Flächenelemente eines Streifens *feste Spanne* $\mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_r = \text{const.}$, so liegt ein isotroper *Böschungsstreifen* vor; seine Flächenelemente haben gegen die Bildebene π feste Neigung ϑ, die durch Formel (18) gegeben ist.

Beispiel 5. Insbesondere erhält man die parataktischen Bilder $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ der *Böschungsstreifen durch eine ebene Kurve* $\mathfrak{x}$ *der Bildebene* π als *Äquitangentialenpaar von* $\mathfrak{x}$, indem man auf den Tangenten der Kurve $\mathfrak{x}$ vom Berührungspunkt weg nach beiden Seiten den konstanten Betrag der isotropen Böschung ϑ abträgt.

Beispiel 6. Sind die beiden Bildkurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ zueinander *zentrisch symmetrisch*, so gehen die Flächenelemente des Streifens durch einen festen Punkt X, es liegt ein *Elementarkegel* vor, das duale Gegenstück eines ebenen Schmiegstreifens (vgl. Beispiel 2).

IV. Isotrope Differentialgeometrie der Kurvenstreifen.

6. Die isotrope Kurventheorie. Nach unserem parataktischen Übertragungsprinzip ist zu erwarten, daß sich die isotrope Differentialgeometrie der Kurvenstreifen in der elementaren Differentialgeometrie der Paare ihrer parataktischen Bildkurven spiegelt. Um diese Verhältnisse genügend verfolgen zu können, bedarf es zunächst einer gewissen Kenntnis der isotropen Kurventheorie.

Gehen wir aus von der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ des Streifens

$$\left.\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= \int p\,dx + q\,dy \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \bar{\mathfrak{x}}(s) \\ \\ \end{matrix} \Bigg\} \mathfrak{x}(s) \qquad (25)$$
$$\left.\begin{aligned} p &= p(s) \\ q &= q(s) \end{aligned}\right\} \bar{\mathfrak{X}}(s).$$

s ist ihr isotroper Bogen, $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ der Grundriß ihres Ortsvektors $\mathfrak{x}(s)$, $\bar{\mathfrak{X}}(s)$ der Grundriß des *sphärischen Bildes*

$$\mathfrak{X}(s) \begin{cases} X = p(s) \\ Y = q(s) \\ Z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \end{cases} \qquad (26)$$

des Streifens auf der isotropen *Einheitskugel*

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \qquad (27)$$

das durch *parallele Tangentenebenen* erzeugt wird.

Das *begleitende Dreibein der Kurve* wird gebildet von ihrem *Tangentenvektor*

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}' = (x', y', z' = px' + qy'), \qquad (28)$$

dessen isotrope Länge eins ist:

$$\bar{\mathfrak{t}}^2 = \bar{\mathfrak{x}}'^2 = x'^2 + y'^2 = 1, \qquad (29)$$

erner von dem dazu normalen *Hauptnormalenvektor* $\mathfrak{h}$, der mittels er isotropen Krümmung $\varkappa$ (16) von $\mathfrak{x}(s)$ durch die Formel

(30) $$\mathfrak{x}'' = \mathfrak{t}' = \varkappa\mathfrak{h} = (x'', y'', z'')$$

efiniert ist, endlich von dem zu $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{h}$ normalen konstanten voll-sotropen *Binormalenvektor*

(31) $$\mathfrak{b} = (0, 0, 1).$$

Bezeichnet τ die isotrope Torsion (17) der Raumkurve, so besteht ür dieses Dreibein als Gegenstück der FRENETschen Formeln das System *er Ableitungsgleichungen der isotropen Kurventheorie*

(32) $$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \varkappa\mathfrak{h} \\ \mathfrak{h}' &= -\varkappa\mathfrak{t} + \tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= 0. \end{aligned}}$$

Aus ihm folgt insbesondere

(33) $$\mathfrak{x}'' = \varkappa\mathfrak{h}\begin{cases} x'' = -\varkappa y' \\ y'' = \varkappa x' \\ z'' = (p'x' + q'y') - \varkappa(py' - qx'). \end{cases}$$

7. Die isotrope Streifentheorie. In der Tangentenebene ε des Streifens iegt normal zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ der Vektor der isotropen *Streifen-normalen* $\mathfrak{y}$, der durch die Formel

(34) $$\mathfrak{y} = \mathfrak{h} - \vartheta\mathfrak{b}$$

ls isotroper Einheitsvektor erklärt werden kann, wobei ϑ die isotrope Neigung der Streifenebene ε gegen die Schmiegebene σ der Kurve $\mathfrak{x}(s)$ bedeutet. Zur Berechnung von ϑ bemerken wir, daß erstens $\mathfrak{y}$ der Streifen-bene ε angehört, also (weil $\varkappa\bar{\mathfrak{y}} = \varkappa\bar{\mathfrak{h}} = \bar{\mathfrak{x}}''$ ist)

(35) $$\varkappa\mathfrak{y} = (x'', y'', px'' + qy'')$$

ein muß, während zweitens nach (34) auch

$$\varkappa\mathfrak{y} = \varkappa\mathfrak{h} - \varkappa\vartheta\mathfrak{b} = (x'', y'', (px'' + qy'') + (p'x' + q'y') - \varkappa\vartheta)$$

ein muß. Der Vergleich der beiden Formeln ergibt die wichtige Gleichung

(36) $$\boxed{\varkappa\vartheta = p'x' + q'y'.}$$

Aus (35) folgt noch für die Streifennormale $\mathfrak{y}$ die Darstellung

(37) $$\mathfrak{y} = (-y', x', qx' - py').$$

Die Größe $\varkappa\vartheta$ ist die eine der drei isotropen Grundinvarianten des Streifens, nämlich seine sogenannte *isotrope Normalkrümmung*. Wir

schreiben

$$\varkappa\vartheta = \frac{1}{R} = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{ds^2} = \frac{\text{II}}{\text{I}} \tag{38}$$

und nennen R den isotropen *Normalkrümmungsradius* des Streifens. Man kann R deuten als Parameter der isotropen *Meusnierschen Kugel* des Streifens, d. h. jener isotropen Oskulationskugel der Kurve $\mathfrak{x}(s)$, welche zugleich die Streifenebene ε berührt. Die Formel (36) oder (38) enthält dabei das isotrope Gegenstück des *Satzes von Meusnier*.

Man kommt zur isotropen Normalkrümmung auch, wenn man für das *begleitende Dreibein des Streifens*, das aus den Vektoren $\mathfrak{t}, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}$ besteht, mittels (32) die Ableitungsformeln aufstellt. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}' &= \varkappa\mathfrak{y} + \varkappa\vartheta\mathfrak{b} \\ \mathfrak{y}' &= -\varkappa\mathfrak{t} + (\tau - \vartheta')\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' &= \mathfrak{o}. \end{aligned} \tag{39}$$

Hierin treten die drei isotropen Grundinvarianten des Streifens auf, nämlich

$$\begin{cases} a = \tau - \vartheta', & \text{die isotrope } \textit{geodätische Windung}, \\ b = \varkappa\vartheta, & \text{die isotrope } \textit{Normalkrümmung}, \\ c = \varkappa, & \text{die isotrope } \textit{geodätische Krümmung}. \end{cases} \tag{40}$$

Man findet ausführlich noch

$$a = \tau - \vartheta' = [\mathfrak{x}'\mathfrak{y}\mathfrak{y}'] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ p' & q' \end{vmatrix} \tag{41}$$

oder

$$a = q'x' - p'y' = \frac{dq\,dx - dp\,dy}{ds^2} = \frac{\text{IV}}{\text{I}}. \tag{42}$$

Das Verschwinden der isotropen Normalkrümmung bzw. geodätischen Windung ist geometrisch leicht zu deuten. Bestimmen wir zu diesem Zwecke den Vektor $\mathfrak{e}(\xi, \eta, \zeta)$ der *Schnittrichtung benachbarter Tangentenebenen* des Streifens. Es ist für sie die Inzidenzrelation und ihre Ableitung erfüllt, d. h.

$$\begin{aligned} \zeta &= p\xi + q\eta \\ 0 &= p'\xi + q'\eta \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{e} = (\xi, \eta, \zeta) = (q', -p', pq' - qp'). \tag{43}$$

Diese zur Kurventangente $\mathfrak{t}$ *konjugierte Tangentenrichtung* $\mathfrak{e}$ des Streifens kann aus den Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{y}$ linear abgeleitet werden; es ist

$$\mathfrak{e} = a\mathfrak{t} - b\mathfrak{y}. \tag{44}$$

Aus dieser Formel folgt:

Satz 11. *$a = 0$ oder* IV $= 0$ *ist notwendig und hinreichend dafür, daß* $\mathfrak{e} = \mathfrak{y}$ *wird, d. h. dafür, daß die konjugierten Streifentangenten* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{e}$ *zueinander normal sind. $a = 0$ oder* IV $= 0$ *kennzeichnet also die isotropen Krümmungsstreifen.*

$b = 0$ oder II $= 0$ *ist notwendig und hinreichend dafür, daß* $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ *wird, d. h. dafür, daß die konjugierten Streifentangenten* $\mathfrak{t}$ *und* $\mathfrak{e}$ *zusammenfallen. $b = 0$ oder* II $= 0$ *kennzeichnet also die Schmiegstreifen.*

Nach der Formel (41) ändert sich die geodätische Windung $a = \tau - \vartheta'$ eines Streifens nicht, wenn man seine Berührungsebenen ε um die darin liegenden Kurventangenten $\mathfrak{t}$ durch konstante isotrope Winkel ϑ^* dreht, d. h. ϑ um die Konstante ϑ^* vermehrt. Für Krümmungsstreifen ($a = 0$) folgt daraus der

Satz 12. (Satz von Joachimsthal.) *Im isotropen Raume folgt aus zweien der folgenden Eigenschaften die dritte: 1. Der Neigungswinkel ϑ^*, den zwei Streifen S_1 und S_2 durch dieselbe Kurve $\mathfrak{x}(s)$ miteinander bilden, ist konstant; 2. Der erste Streifen S_1 ist ein Krümmungsstreifen; 3. Der zweite Streifen S_2 ist ein Krümmungsstreifen.*

8. Das sphärische Bild des Streifens. Die Formel von Rodrigues und ein Gegenstück dazu. Man kann die Schmiegstreifen und die isotropen Krümmungsstreifen auch mittels ihrer isotropen sphärischen Bilder (26) kennzeichnen. Man findet nämlich aus (26) für den Tangentenvektor $\mathfrak{T} = \mathfrak{X}'(s)$ des sphärischen Bildes $\mathfrak{X}(s)$ des Streifens (25) den Vektor

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{X}' = (p', q', pp' + qq'); \tag{45}$$

daraus folgt für das *Bogenelement dS des sphärischen Bildes*

$$dS^2 = dp^2 + dq^2 = \text{III}. \tag{46}$$

Ferner ergibt sich im Vergleich mit (43) der

Satz 13. *Der Tangentenvektor $\mathfrak{X}'$ des sphärischen Bildes $\mathfrak{X}(s)$ ist stets normal zu dem Vektor $\mathfrak{e} = a\mathfrak{t} - b\mathfrak{y}$, nach welchem sich benachbarte Tangentenebenen des Streifens schneiden.*

Für isotrope Krümmungsstreifen ($a = 0$) folgt, daß $\mathfrak{y} \perp \mathfrak{X}'$ das heißt

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}' \parallel \mathfrak{X}'$$

ist.

Für Schmiegstreifen ($b = 0$) folgt, daß $\mathfrak{t} \perp \mathfrak{X}'$ das heißt

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{h} \parallel \mathfrak{X}'$$

ist.

Es gelten daher in diesen beiden Fällen Gleichungen der folgenden Arten:

1. Für Krümmungsstreifen:

$$\mathfrak{X}' = \lambda \mathfrak{x}'$$

2. Für Schmiegstreifen:

$$\mathfrak{X}' = \lambda \mathfrak{h}.$$

Zur Bestimmung des skalaren Faktors λ ziehen wir die vektorielle Darstellung der

Normalkrümmung (36 und 38) heran. Es ist	geodätischen Windung (41) heran. Es ist wegen $\vartheta = 0$
(47) $b = \frac{1}{R} = (\bar{\mathfrak{x}}' \bar{\mathfrak{X}}')$	$a = \tau = [\bar{\mathfrak{x}}' \bar{\mathfrak{X}}']$

also, wenn wir für $\mathfrak{X}'$ die obigen Werte einsetzen

$\frac{1}{R} = \lambda \bar{\mathfrak{x}}'^2 = \lambda$	$\tau = [\bar{\mathfrak{t}}, \lambda \bar{\mathfrak{y}}] = \lambda [\bar{\mathfrak{t}}, \bar{\mathfrak{y}}] = \lambda$
d. h.	d. h.
(48) $\boxed{\mathfrak{X}' = \frac{1}{R} \mathfrak{x}'.}$	$\boxed{\mathfrak{X}' = \tau \mathfrak{y}.}$
Dies ist die *Formel von Rodrigues für isotrope Krümmungsstreifen.*	Dies ist das *Gegenstück zur Formel von Rodrigues für Schmiegstreifen.*

Für *Koordinaten* ausführlich angeschrieben lauten diese wichtigen Formeln nach (45) und (33)

$$(49) \qquad \begin{cases} p' = \frac{1}{R} x' \\ q' = \frac{1}{R} y'. \end{cases} \qquad \begin{cases} p' = -\tau y' \\ q' = \tau x'. \end{cases}$$

Die nichtangeschriebenen Formeln für die dritte Koordinate von $\mathfrak{X}'$ sind eine Folge davon.

Bemerkung. Man kann die auf *Schmiegstreifen* bezügliche Formel (48 rechts) durch Übergang zu den normalen Vektoren

$$(50) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{Y}' &= |\mathfrak{X}' = (-q', p', -pq' + qp') \quad \text{und} \\ -\mathfrak{x}' &= |\mathfrak{y} = (-x', -y', -px' - qy') \end{aligned}$$

auch in der Form

$$(51) \qquad \boxed{\mathfrak{Y}' = -\tau \mathfrak{x}'}$$

schreiben. Der Vektor

$$(52) \qquad \bar{\mathfrak{Y}} = (-q, p)$$

kann dabei z. B. als der *Spurvektor der Tangentenebene* (Schmiegebene) des Streifens auf der Bildebene π oder als der um $+\frac{\pi}{2}$ *geschwenkte Grundrißvektor des sphärischen Bildvektors* $\mathfrak{X}$ gedeutet werden.

V. Differentialgeometrie der parataktischen Streifenbilder.

9. Schmiegstreifen. Wir sind nun in der Lage, die isotropen differentiellen Eigenschaften der Streifen auf elementare differentielle Eigenschaften ihrer parataktischen Bildkurven zu übertragen. Es seien also

ach (8) die beiden Kurven

$$\mathfrak{x}_l \begin{cases} x_l = x(s) + q(s) \\ y_l = y(s) - p(s) \end{cases} \qquad \mathfrak{x}_r \begin{cases} x_r = x(s) - q(s) \\ y_r = y(s) + p(s) \end{cases} \tag{53}$$

ie parataktischen Bilder des (allgemeinen) Streifens (25). Es folgt

$$d\mathfrak{x}_l \begin{cases} dx_l = dx + dq \\ dy_l = dy - dp \end{cases} \qquad d\mathfrak{x}_r \begin{cases} dx_r = dx - dq \\ dy_r = dy + dp, \end{cases} \tag{54}$$

ormeln, die wir mit Rücksicht auf (43) auch in der vektoriellen Gestalt

$$\boxed{\mathfrak{x}_l' = \bar{\mathfrak{x}}' \cdot \bar{\mathfrak{e}}, \quad \mathfrak{x}_r' = \bar{\mathfrak{x}}' - \bar{\mathfrak{e}}} \tag{55}$$

usammenfassen können. Wir berechnen das Außenprodukt

$$\boxed{\tfrac{1}{2}[d\mathfrak{x}_l\, d\mathfrak{x}_r] = dp\,dx + dq\,dy = \mathrm{II};} \tag{56}$$

s verschwindet dann und nur dann, wenn die Bildkurven durch *parallele Tangenten* auf einander bezogen sind; der Streifen ist dann wegen $\mathrm{II} = 0$ in *Schmiegstreifen*. Also gilt

Satz 14. *Durch die parataktische Abbildung wird ein räumlicher Schmiegstreifen auf ein parallelbezogenes Kurvenpaar $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ übertragen und umgekehrt.*

Bemerkung 1. Eine der beiden parallelbezogenen Bildkurven kann dabei in einen festen Punkt E_l oder E_r ausarten. Der Schmiegstreifen liegt dann in einem Links- oder Rechtsgewinde.

Da für *Schmiegstreifen* nach Nr. **8**.

$$\vartheta = 0, \quad a = \tau - \vartheta' = \tau, \quad b = \varkappa\vartheta = 0, \quad p' = -\tau y, \quad q' = \tau x' \tag{57}$$

ist, kann man die Tangentenrichtungen $\mathfrak{x}_l', \mathfrak{x}_r'$ der parallelbezogenen Bildkurven des *Schmiegstreifens* nach (54) in der Form

$$\boxed{\mathfrak{x}_l' = (1+\tau)\bar{\mathfrak{x}}', \quad \mathfrak{x}_r' = (1-\tau)\bar{\mathfrak{x}}'} \tag{58}$$

schreiben.

In dem Sonderfalle, wo $\tau = \tau_0 = \text{konst.}$ ist, folgt daraus durch Integration

$$\mathfrak{x}_l = (1+\tau_0)\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{x}_r = (1-\tau_0)\bar{\mathfrak{x}} + \bar{\mathfrak{a}}. \tag{59}$$

Darin steckt der

Satz 15. *Die beiden parataktischen Bilder $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ eines Schmiegstreifens der festen Torsion τ_0 sind zueinander zentrisch ähnliche Kurven, die aus dem Kurvengrundrisse $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ durch die zentrischen Ähnlichkeiten der Moduln $(1+\tau_0)$ und $(1-\tau_0)$ hervorgehen. Das Zentrum der Ähnlichkeit ist dabei der Nullpunkt N der Bildebene π bezüglich des Gewindes*

$$dz = \tau_0(x\,dy - y\,dx) + A\,dx + B\,dy, \tag{60}$$

in welchem der Schmiegstreifen von $\mathfrak{x}(s)$ als Nullstreifen enthalten ist.

Bemerkung 2. Für $\tau_0 = \pm 1$ erhält man nach Nr. **5** wieder den in Bemerkung 1 besprochenen Sonderfall.

Wir wollen als Anwendung von (58) sofort die wichtige Frage beantworten, nach dem *isotropen Kennzeichen jener Schmiegstreifen deren parataktische Bildkurven* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *gleichsinnig parallel-bezogene Eilinien* (geschlossene konvexe Kurven) sind. Nach (58) ist notwendig und hinreichend für *Gleichsinnigkeit* der Tangenten $\mathfrak{x}_l'$ und $\mathfrak{x}_r'$, daß

$$(1+\tau)(1-\tau) = 1-\tau^2 > 0$$

d. h.

$$\boxed{-1 < \tau < +1} \tag{61}$$

ist. Da die *Mittenkurve*

$$\bar{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}_l + \mathfrak{x}_r}{2} \tag{62}$$

der Bildkurven, über der sich nach Satz 10 der Schmiegstreifen $\mathfrak{x}(s)$ periodisch mit der Ganghöhe (23) erhebt, dann nach (58) auf $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ *ebenfalls durch gleichsinnig parallele Tangenten bezogen* ist, also alle drei Kurven gleiche Kontingenzwinkel $d\varphi$ haben, erhält man für die Krümmungen von $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r, \bar{\mathfrak{x}}$ die Formeln

$$\varkappa = \frac{d\varphi}{ds}, \qquad \varkappa_l = \frac{d\varphi}{ds_l}, \qquad \varkappa_r = \frac{d\varphi}{ds_r}, \tag{63}$$

unter ds_l, ds_r die *Bogenelemente der Bildkurven* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ verstanden, für die sich aus (58) ergibt

$$\boxed{ds_l = (1+\tau)\,ds, \quad ds_r = (1-\tau)\,ds.} \tag{64}$$

Also hängen die Krümmungen (63) durch die Formeln

$$\boxed{\varkappa_l = \frac{\varkappa}{1+\tau}, \quad \varkappa_r = \frac{\varkappa}{1-\tau}} \tag{65}$$

zusammen. Aus $\infty > \varkappa > 0$ folgt somit unter der Voraussetzung (61), daß auch $\infty > \varkappa_l > 0$ und $\infty > \varkappa_r > 0$ ist. Also gilt insgesamt der

Satz 16. *Soll der Schmiegstreifen einer Kurve* $\mathfrak{x}(s)$ *des isotropen Raumes zwei gleichsinnig parallel bezogene Eilinien* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *als parataktische Bildkurven haben, so muß er sich*

1. periodisch über der Eilinie $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(s)$ *mit der beschränkten nichtverschwindenden (z. B. positiven) Krümmung* $(\infty > \varkappa > 0)$ *erheben und*

2. muß seine Torsion τ *der Ungleichung* $-1 < \tau < +1$ *genügen.*

Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Der Schmiegstreifen ist geschlossen, wenn die beiden Bildkurven flächengleich sind.

Aus (65) folgen noch die Formeln

$$\boxed{\varkappa = \frac{2\,\varkappa_l \varkappa_r}{\varkappa_l + \varkappa_r}, \quad \tau = \frac{\varkappa_r - \varkappa_l}{\varkappa_r + \varkappa_l};} \tag{66}$$

uch sie enthalten eine einfache Deutung der isotropen Invarianten es Schmiegstreifens mittels der elementaren Invarianten seiner beiden arataktischen Bildkurven. Sie enthalten u. a. auch den elementaren

Satz 17. *Die Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ zweier aufeinander durch gleichsinnig arallele Tangenten bezogenen Eilinien beschränkter positiver Krümmung* $\infty > \varkappa_l, \varkappa_r > 0$) *ist stets wieder eine Eilinie beschränkter positiver Krümmung* ($\infty > \varkappa > 0$).

10. Isotrope Krümmungsstreifen. Wir berechnen nun die *Bogenlemente* ds_l, ds_r *der parataktischen Bildkurven* (53) des allgemeinen treifens (25) und finden aus (54)

$$ds_l^2 = dx_l^2 + dy_l^2 = (dx^2 + dy^2) + (dp^2 + dq^2) + 2(dq\,dx - dp\,dy),$$
$$ds_r^2 = dx_r^2 + dy_r^2 = (dx^2 + dy^2) + (dp^2 + dq^2) - 2(dq\,dx - dp\,dy)$$

der unter Heranziehung der Grundformen I, III, IV der isotropen treifentheorie

67)
$$\boxed{\begin{aligned} ds_l^2 &= \mathrm{I} + \mathrm{III} + 2\,\mathrm{IV} \\ ds_r^2 &= \mathrm{I} + \mathrm{III} - 2\,\mathrm{IV}. \end{aligned}}$$

Da IV $= 0$ die isotropen Krümmungsstreifen kennzeichnet, folgt

Satz 18. *Für einen isotropen Krümmungsstreifen und nur ür einen solchen sind die beiden parataktischen Streifenbilder $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ ufeinander isometrisch bezogen* ($s_l = s_r$).

Außer ihren Krümmungen $\varkappa_l$ und $\varkappa_r$ besitzen zwei isometrische bene Kurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ noch den Schnittwinkel 2ω ihrer Tangenten

68)
$$2\omega = \widehat{\mathfrak{x}_l' \mathfrak{x}_r'}$$

ls elementare Invariante gegen simultane gleichwinkelige Bewegungen. Also wird es nach dem parataktischen Übertragungsprinzip gelingen, durch diese drei elementaren Invarianten $\varkappa_l$, $\varkappa_r$ und ω die isotropen Invarianten des zugehörigen isotropen Krümmungsstreifens auszudrücken, nämlich seine geodätische Krümmung $\varkappa$ (d. i. auch die Krümmung der Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ der isometrischen Kurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$) und seine Normalkrümmung $b = \varkappa\vartheta = \frac{1}{R}$.

In der Tat folgt für Krümmungsstreifen aus $a = \tau \cdot \vartheta' = 0$ zunächst nach (44)

$$\bar{\mathfrak{e}} = a\bar{\mathfrak{t}} - b\bar{\mathfrak{y}} = -\varkappa\vartheta\bar{\mathfrak{h}}$$

und aus (55) für die Tangentenvektoren der isometrischen Bildkurven

69)
$$\mathfrak{x}_l' = \bar{\mathfrak{t}} - \varkappa\vartheta\bar{\mathfrak{h}}, \quad \mathfrak{x}_r' = \bar{\mathfrak{t}} + \varkappa\vartheta\bar{\mathfrak{h}}.$$

Daraus findet man für den Schnittwinkel 2ω der Tangenten

$$\sin 2\omega = \frac{[\mathfrak{x}_l' \mathfrak{x}_r']}{|\mathfrak{x}_l'| \cdot |\mathfrak{x}_r'|} = \frac{2\varkappa\vartheta}{1 + \varkappa^2\vartheta^2}, \quad \cos 2\omega = \frac{(\mathfrak{x}_l' \mathfrak{x}_r')}{|\mathfrak{x}_l'| \cdot |\mathfrak{x}_r'|} = \frac{1 - \varkappa^2\vartheta^2}{1 + \varkappa^2\vartheta^2}$$

oder einfacher

$$\boxed{\operatorname{tg}\omega = \varkappa\vartheta = \frac{1}{R}.} \tag{70}$$

Damit ist die *Normalkrümmung* des isotropen *Krümmungsstreifens* i sehr einfacher Weise durch den *halben Schnittwinkel* ω *der Tangente seiner isometrischen Bildkurven* ausgedrückt.

Um auch seine geodätische *Krümmung* $\varkappa$ zu erhalten, benötige wir noch die Krümmungen $\varkappa_l$ und $\varkappa_r$ der beiden isometrischen Bild kurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$. Da nach den FRENETschen Formeln (32)

$$\bar{\mathfrak{t}}' = \varkappa\bar{\mathfrak{h}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{h}}' = -\varkappa\bar{\mathfrak{t}}$$

ist, ergibt sich aus (69)

$$\mathfrak{x}_l'' = \varkappa^2\vartheta\bar{\mathfrak{t}} + (\varkappa - (\varkappa\vartheta)')\bar{\mathfrak{h}}, \quad \mathfrak{x}_r'' = -\varkappa^2\vartheta\bar{\mathfrak{t}} + (\varkappa + (\varkappa\vartheta)')\bar{\mathfrak{h}} \tag{71}$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_l &= \frac{[\mathfrak{x}_l'\mathfrak{x}_l'']}{(\mathfrak{x}_l'^2)^{3/2}} = \frac{\varkappa(1+\varkappa^2\vartheta^2) - (\varkappa\vartheta)'}{(1+\varkappa^2\vartheta^2)^{3/2}} \\ \varkappa_r &= \frac{[\mathfrak{x}_r'\mathfrak{x}_r'']}{(\mathfrak{x}_r'^2)^{3/2}} = \frac{\varkappa(1+\varkappa^2\vartheta^2) + (\varkappa\vartheta)'}{(1+\varkappa^2\vartheta^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

oder mit Rücksicht auf (70) einfacher

$$\boxed{\varkappa_l = (\varkappa - \omega')\cos\omega, \quad \varkappa_r = (\varkappa + \omega')\cos\omega,} \tag{73}$$

woraus man, wie gewünscht, die Formel

$$\boxed{\varkappa = \frac{\varkappa_l + \varkappa_r}{2\cdot\cos\omega}} \tag{74}$$

als die *elementare Darstellung und Deutung der geodätischen Krümmun* $\varkappa$ *des isotropen Krümmungsstreifens* $\mathfrak{x}(s)$, die zugleich auch die *Krümmun der Mittenkurve der isometrischen Linien* $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ ist, erhält.

Vermerken wir noch die Formeln

$$\boxed{\frac{\varkappa_r - \varkappa_l}{2} = \omega'\cdot\cos\omega = \frac{(\varkappa\vartheta)'}{(1+\varkappa^2\vartheta^2)^{3/2}}.} \tag{75}$$

11. Übersicht. Zusammenfassend werden also durch die parataktisch Abbildung die Streifen des isotropen Raumes und ihre isotropen Invari anten übertragen auf die Paare ebener Kurven und ihre elementare Invarianten gegen simultane gleichwinkelige Bewegungen, was wir hie (für die folgenden Überlegungen ausreichend) wenigstens für die Fäll der Schmiegungs- und isotropen Krümmungsstreifen bewiesen haben

nsbesondere entsprechen einander dabei die folgenden Figuren:

Isotroper Raum	Parataktische Bildebene
Schmiegstreifen	zwei parallel bezogene Bildkurven
isotrope Krümmungsstreifen	zwei isometrische Bildkurven
geschlossene Streifen	zwei geschlossene flächengleiche Bildkurven.

VI. Der Vierscheitelsatz der Relativen Differentialgeometrie.

12. Übertragung auf den isotropen Raum. Als erste neue Anwendung eweisen wir mit unseren räumlichen isotropen Mitteln den *Vierheitelsatz der Relativen Differentialgeometrie* in der folgenden Fassung:

Satz 19. *Werden zwei Eilinien $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ richtungstreu d.h. durch leichsinnig parallele Tangenten aufeinander bezogen, so gibt es, stetige ifferenzierbarkeit ihrer (positiven, beschränkten) Krümmungen $\varkappa_l, \varkappa_r$ orausgesetzt, mindestens vier Paare entsprechender Punkte, für welche as Verhältnis der Krümmungen $\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}$ extrem (stationär) ist.*

Bemerkung 1. Deutet man $\mathfrak{x}_r$ als *Eichkurve* einer *Minkowskichen Maßbestimmung*, so ist

76) $$\tilde{\varkappa} = \frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}$$

ie *Relativkrümmung der Kurve* $\mathfrak{x}_l$ bezüglich dieser Maßbestimmung, nd der von W. Blaschke[2]) stammende Satz 19 fällt mit dem Vierscheitelatz der ebenen Relativen Differentialgeometrie zusammen, wie ihn V. Süss[3]) zuerst aufgefaßt und bewiesen hat. Der Vierscheitelsatz über einzelne) Eilinien der elementaren Differentialgeometrie ist als Sonderall darin enthalten, wenn die Eichkurve $\mathfrak{x}_r$ als Kreis gewählt wird.

Wir übertragen den Satz 19 zunächst in den isotropen Raum, indem ir nach Satz 14 die gleichsinnig parallel bezogenen Eilinien $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ als arataktische Bilder eines Schmiegstreifens $\mathfrak{x}(s)$ auffassen, der sich, wie ir wissen, periodisch mit der Ganghöhe $h = \frac{1}{2}(F_l - F_r)$ über der eininnig durchlaufenden und gleichfalls eiförmigen Mittenkurve $= \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_l + \mathfrak{x}_r)$ erhebt. Jedem vollen Gange des Schmiegstreifens entpricht dabei eine volle einsinnige Umlaufung der beiden Bildkurven $_l, \mathfrak{x}_r$. Ist u die isotrope Bogenlänge eines Ganges, d. h. der Umfang der Iittenlinie $\bar{\mathfrak{x}}(s)$, so sind sowohl der Ortsvektor $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ als auch die Inarianten $\varkappa$ und τ des Schmiegstreifens periodische Funktionen

[2]) W. Blaschke — K. Reidemeister, Vorlesungen über Differentialgeometrie II: ffine Differentialgeometrie. Berlin 1923, S. 65, Lehrsatz 12.

[3]) W. Süss, Zur relativen Differentialgeometrie I. Über Eilinien und Eiflächen n der ebenen und räumlichen Differentialgeometrie. Jap. Journ. Math. 4 (1927 . 61—62.

des Bogens s mit der Periode u, z. B.

$$\bar{\mathfrak{x}}(s+u) = \bar{\mathfrak{x}}(s), \quad \tau(s+u) = \tau(s), \tag{77}$$

wobei die Torsion τ nach Satz 16 noch durch die Ungleichung

$$-1 < \tau < +1 \tag{78}$$

beschränkt ist, weil $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ richtungstreu aufeinander bezogene Eilinie sind.

Zwischen der Torsion τ des Schmiegstreifens und den Krümmunge $\varkappa_l, \varkappa_r$ seiner parataktischen Bilder $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ besteht dabei nach (66) di Beziehung

$$\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r} = \frac{1-\tau}{1+\tau}. \tag{79}$$

Dieses kritische Verhältnis der Krümmungen der Eilinien $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ is nun *extrem* (stationär) dann und nur dann, wenn die Ableitung

$$\left(\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}\right)' = -\frac{2\tau'}{(1+\tau)^2} = 0 \tag{80}$$

ist, d. h. wegen (78), dann und nur dann, wenn die isotrope Torsion τ de Schmiegstreifens extrem (stationär) ist ($\tau' = 0$).

Nochmals ableitend findet man aus

$$\left(\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}\right)'' = -2\,\frac{(1+\tau)\tau'' - 2\tau'^2}{(1+\tau)^3}$$

daß an den Stellen, wo $\tau' = 0$ ist,

$$\left(\frac{\varkappa_l}{\varkappa_r}\right)'' = -\frac{2\tau''}{(1+\tau)^2} \tag{81}$$

ist, d. h. daß einem allfälligen *Maximum* von $\varkappa_l/\varkappa_r$ ein *Minimum* von entspricht und umgekehrt.

Der *relative Vierscheitelsatz* 19 ist daher vermöge der para taktischen Abbildung *dem folgenden Satze über periodische Schmieg streifen oder Raumkurven des isotropen Raumes äquivalent:*

Satz 20. *Ist $\mathfrak{x}(s)$ eine Raumkurve der beschränkten, einmal steti differenzierbaren isotropen Torsion $-1 < \tau < +1$, die sich periodisc über dem eiförmigen, positiv gekrümmten ($\infty > \varkappa > 0$) und von jede Periodengange einmal und einsinnig durchlaufenen Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ e hebt, so existieren in jedem Periodengange der Raumkurve mindesten vier Stellen mit extremer (stationärer) isotroper Torsion τ.*

13. Räumlicher Beweis der isotropen Fassung des relativen Vie scheitelsatzes. Beim Beweise von Satz 20 können wir annehmen, da die isotrope Torsion $\tau(s)$der periodischen Kurve $\mathfrak{x}(s)$ *nicht konstan* sei; im Gegenfalle wäre $\tau' \equiv 0$, und die Eilinien $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ wäre als parataktische Bilder eines *Schmiegstreifens konstanter isotroper To sion* nach Satz 15 zueinander *zentrisch ähnlich*, das Verhältnis ihre Krümmungen $\varkappa_l/\varkappa_r$ wäre daher ebenfalls konstant, ein Trivialfall, den wi ausschließen wollen.

Wenn die Torsion τ aber *nicht konstant* ist, wird sie wegen ihrer rausgesetzten Differenzierbarkeit und Beschränktheit in jedem Periongange z. B. für

$$0 \leqq s < u \tag{2}$$

ach dem Satze von Weierstrass ein absolutes Maximum bzw. Minimum sitzen, etwa in den Punkten $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}(s_1)$ und $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}(s_2)$, in denen daher $= 0$ ist. Weitere Nullstellen von τ können nur paarweise auftreten. aß mindestens ein solches weiteres Paar von Nullstellen vorhanden in muß, wie Satz 20 behauptet, beweisen wir nach dem bekannten *irekten Verfahren* von G. Herglotz[4]).

Angenommen, es seien $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ die einzigen Stellen extremer orsion in dem Periodengange (82). Dann werden diese Punkte den iförmigen) Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ der Raumkurve in zwei Bögen k_+ und k_- zergen, auf denen $\tau'(s)$ notwendig *festes Zeichen* hätte, etwa

$$\tau' > 0 \text{ auf } k_+, \quad \tau' < 0 \text{ auf } k_-.$$

s sei weiter

$$f = ax + by + c \equiv \bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{x}} + c = 0 \tag{3}$$

e Gleichung der *Verbindungsgeraden* f der Punkte $\bar{\mathfrak{x}}_1$ und $\bar{\mathfrak{x}}_2$, etwa normiert, daß ebenfalls

$$f > 0 \text{ auf } k_+, \quad f < 0 \text{ auf } k_-$$

t. Dann wäre auf der ganzen (in $\bar{\mathfrak{x}}_1$ und $\bar{\mathfrak{x}}_2$ punktierten) Eilinie $\equiv k = k_+ + k_-$ sicher $f \cdot \tau' > 0$, also auch (im Sinne wachsender Bogen rstreckt)

$$\oint_k f \cdot \tau' \, ds > 0. \tag{4}$$

Um zum Widerspruche zu gelangen, berechnen wir den wirkchen Wert dieses Kurvenintegrals. Es ist zunächst nach (83)

$$\oint_k f \cdot \tau' \, ds = \oint_k (\bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{x}} + c)\, \tau' \, ds = c \oint_k \tau' \, ds + \bar{\mathfrak{a}} \oint_k \bar{\mathfrak{x}} \tau' \, ds.$$

Vegen der Periodizität von $\tau(s)$ ist nun nach (77) das erste Integral

$$\oint_k \tau' \, ds = \tau(u) - \tau(0) = 0,$$

ir das zweite ergibt partielle Integration

$$\oint_k \bar{\mathfrak{x}} \tau' \, ds = \bar{\mathfrak{x}} \tau \Big|_0^u - \oint_k \tau \bar{\mathfrak{x}}' \cdot ds.$$

Vegen der Periodizität von $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ und $\tau(s)$ ist hierin der erste Ausdruck

4) Vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie 1, 3. Aufl. Berlin 930. § 12, S. 30—32.

rechts gleich 0, das restliche Integral aber ist nach dem für Schmieg streifen gültigen Gegenstück zur Formel von Rodrigues (51)

$$-\oint_k \tau \bar{\xi}' ds = \oint_k \bar{\mathfrak{Y}}' ds = \bar{\mathfrak{Y}}(u) - \bar{\mathfrak{Y}}(0) = 0;$$

denn auch der Vektor $\bar{\mathfrak{Y}}(s) = (-q, p)$ d. i. der geschwenkte Grundrif des sphärischen Bildvektors $\mathfrak{X}(s)$ des Schmiegstreifens ist in s periodisch Also ist insgesamt in Wahrheit

$$\oint_k f \cdot \tau' ds = 0 \tag{85}$$

im Widerspruch zu (84).

Es muß also mindestens auf einem der beiden Teilbogen k_- oder k noch ein weiteres Nullstellenpaar von τ' liegen, d. h. auf jedem Gang der periodischen Raumkurve $\mathfrak{x}(s)$ existieren in der Tat mindestens *vier* Stellen mit extremer (stationärer) Torsion τ.

Damit ist unser räumlicher Beweis des relativen Vierscheitelsatzes beendet.

Bemerkung. Daß der Fall von genau vier Stellen extremer Torsion möglich ist, lehrt das Beispiel einer geeignet dimensionierten isotropen sphärischen Ellipse, z. B. der Kurve

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = \tfrac{1}{2}(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t), \quad \text{mit } a = 4,\ b = 3, \tag{86}$$

welche geschlossen ist und an den vier Stellen $t = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$ extreme isotrope Torsion τ aufweist. Man findet nämlich

$$\tau = \frac{a^2 - b^2}{a\,b}\sin t \cdot \cos t,$$

also $|\tau| < 1$, wenn z. B., wie oben, $a = 4$, $b = 3$ ist.

VII. Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Paare flächengleicher Eilinien.

14. Der Satz und seine räumliche Übertragung. Beweis. Es gilt

Satz 21. *Sind die positiv und stetig gekrümmten flächengleichen Eilinien $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ richtungstreu, d. h. durch gleichsinnig parallele Tangenten aufeinander bezogen, so gibt es zumindest vier Paare entsprechender Punkte, in denen sie gleiche Krümmungen ($\varkappa_l = \varkappa_r$) aufweisen.*

Durch parataktische Übertragung entsteht aus dem Eilinienpaar nach Satz 16 der *geschlossene Schmiegstreifen* einer beschränkten Raumkurve mit einsinnig und ebenfalls tangentenparallel durchlaufenem *eiförmigem Grundriß* $\bar{\mathfrak{x}} = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_l + \mathfrak{x}_r)$, dessen isotrope Torsion τ durch die Ungleichung $-1 < \tau < 1$ beschränkt ist. Nach (66) besteht dabei die Gleichung

$$\tau = \frac{\varkappa_r - \varkappa_l}{\varkappa_r + \varkappa_l}. \tag{87}$$

s werden also *Stellenpaare* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *gleicher Krümmung* ($\varkappa_l = \varkappa_r$) auf olche Punkte $\mathfrak{x}$ des Schmiegstreifens übertragen, deren isotrope *Torsion* $= 0$ ist, d. h., deren *Schmiegebenen stationär* sind.

Unser Satz 21 ist also durch die parataktische Abbildung *äquivalent* dem

Satz 22. *Jede geschlossene Raumkurve* $\mathfrak{x}$ *über einsinnig (einmal) urchlaufenem eiförmigen Grundriß* $\bar{\mathfrak{x}}$, *deren stetige isotrope Torsion* τ *urch die Ungleichung* $-1 < \tau < +1$ *beschränkt ist, besitzt mindestens ier stationäre Schmiegebenen.*

Dieses Theorem ist nun eine unmittelbare Folge eines zuerst von . Mohrmann bewiesenen Satzes[5]), der folgendes besagt:

Satz 23 (von H. Mohrmann). *Jede auf einer Eifläche gelegene, stetig ewundene geschlossene Kurve ohne singuläre Punkte (mehrfache Punkte, icken usw.) besitzt mindestens vier stationäre Schmiegebenen.*

In der Tat sind die Bedingungen dieses Satzes in unserem Falle erfüllt, denn wegen der einmaligen einsinnigen Durchlaufung ihres Grundisses $\bar{\mathfrak{x}}$ hat die Raumkurve $\mathfrak{x}$ keinen mehrfachen Punkt und wegen ihres iförmigen Grundrisses und ihrer räumlichen Beschränktheit liegt sie auch uf einer Eifläche, z. B. auf dem oben und unten geeignet abgeschlossenen ylinder, den man über ihrem eilinigen Grundriß $\bar{\mathfrak{x}}$ errichten kann. Nach em Satze von Mohrmann hat der Schmiegstreifen der Raumkurve $\mathfrak{x}$ aher mindestens vier stationäre Schmiegelemente, w. z. b. w.

Bemerkung 1. Daß es wirklich Paare richtungstreu bezogener flächenleicher Eilinien mit genau vier Stellenpaaren gleicher Krümmung gibt, zeigt das eispiel einer Ellipse der Halbachsen a, b und des flächengleichen Kreises vom adius $r = \sqrt{a\,b}$; oder das andere Beispiel zweier kongruenter, aber gegeneinander um einen Winkel $\varphi < \pi$ gedrehter, parallel bezogener Ellipsen. Im Raume ann man sich auch wieder auf das in der vorigen Ziffer angegebene Beispiel erufen, das eine geschlossene Raumkurve mit elliptischem Grundriß und genau ier Stellen $\left(t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ verschwindender isotroper Torsion enthält.

Bemerkung 2. Satz 21 enthält als Sonderfall den *elementaren Vierscheitelsatz* über einzelne Eilinien. Man hat dabei nur eine der beiden Eilinien ls *flächengleichen Kreis* zu wählen. Es gibt dann nämlich auf der anderen Eilinie indestens vier Stellen, in denen die Krümmung denselben konstanten Wert der reiskrümmung besitzt, also dazwischen auch mindestens vier Stellen mit extremer rümmung (Scheitel).

Bemerkung 3. Offenbar kann man in Satz 22 die dort verlangte Beschränung der Torsion fallen lassen, bzw. durch die wesentlich schwächere Forderung $-\infty < \tau < +\infty$ ersetzen. Der Beweis mittels Satz 23 bleibt ja davon unberührt. Die Kurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ in Satz 21 dürfen daher z. B. auch Spitzen ($\tau = +1$ bzw. -1) haben, wenn nur die Eiform und die Einsinnigkeit der (einmaligen!) Umlaufung ihrer Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ erhalten bleibt. Die Anzahl der möglichen Spitzen wird dabei auf jeder der Kurven notwendig eine gerade sein. Die Beziehung der beiden Kurven $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ aufeinander ist dabei zum Teil gleichsinnig, zum Teil gegensinnig parallel, wobei der Sinnwechsel durch die Spitzen veranlaßt wird.

[5]) H. Mohrmann, Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals. Sitz. Ber. kgl. Bayerischen Akad. Wiss., Math. phys. Kl. (1917) 3 S.

VIII. Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes auf Paare isometrischer umfangsgleicher Eilinien.

15. Formulierung des Satzes. Möglichkeit nicht-eiförmiger Mittenkurven. Wie vor einiger Zeit W. Blaschke bemerkt hat, folgt aus einem Theorem von A. Cauchy über ebene konvexe Vielecke durch Grenzübergang der folgende[6])

Satz 24. *Sind zwei umfangsgleiche stetig gekrümmte Eilinien* $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ *gleichsinnig und längentreu (isometrisch,* $s_l = s_r$*) aufeinander bezogen, so gibt es auf ihnen mindestens vier Paare entsprechender Punkte mit gleichen Krümmungen* ($\varkappa_l = \varkappa_r$).

Vermöge unserer parataktischen Abbildung entspricht dem isometrischen Eilinienpaar $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ nach den Sätzen 10 und 18 ein *Krümmungsstreifen* $\mathfrak{x}(s)$ des isotropen Raumes, der sich mit der Ganghöhe $h = \frac{1}{2}(F_l - F_r)$ *periodisch* über der *Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}(s) = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_l + \mathfrak{x}_r)$ erhebt, die von jedem Gange des Streifens einmal überdeckt wird.

Im Gegensatze zu den früheren Fällen, wo die Zuordnung durch gleichsinnig parallele Tangenten geschah, muß aber jetzt die *Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$ *der isometrischen Eilinien nicht notwendig wieder eine Eilinie sein; sie kann vielmehr ohne weiteres Spitzen haben.* Ist nämlich wieder $2\omega = \widehat{\mathfrak{x}_l'\mathfrak{x}_r'}$ der Winkel entsprechender Tangenten der isometrischen Eilinien $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$, so ist nach (74) die *Krümmung* $\varkappa$ *der Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$ (oder der Trägerkurve $\mathfrak{x}(s)$ des zugehörigen isotropen Krümmungsstreifens)

$$\varkappa = \frac{\varkappa_l + \varkappa_r}{2 \cdot \cos\omega}. \tag{88}$$

Spitzen, d. h. die Werte $\varkappa = \infty$ treten (wegen der Beschränktheit von $\varkappa_l$ und $\varkappa_r$ immer dann und nur dann auf, wenn $\cos\omega = 0$, d. h. $2\omega = \pi$ ist, also *stets dann und nur dann, wenn die entsprechenden Tangentenvektoren* $\mathfrak{x}_l'$ *und* $\mathfrak{x}_r'$ *antiparallel* sind.

Bemerkung 1. Ordnet man z. B. auf einer *Eilinie ohne Mittelpunkt* einander solche Punkte $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ zu, deren Bogen um den halben Umfang differieren, so tritt dies *Ereignis antiparalleler Tangentenpaare*

[6]) A. Cauchy, Sur les polygones et les polyèdres. Seconde mém. J. école polytechn. **9** (1813), S. 87 = Oeuvres (2) 1 (Paris 1905) S. 26—38. — Verbesserung dazu bei E. Steinitz — H. Rademacher, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin 1934, § 16.

W. Blaschke, Über Paare umfangsgleicher Eilinien. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. **48** (1938) S. 69—74. — Der elementare Beweis, den G. Bol in seiner anschließenden Note „Über einen Satz von Cauchy" ebenda S. 74—76 gegeben hat, findet sich (nach Zbl. f. Math.) schon früher bei B. Segre, Il teorema sul minimo numero dei vertici di un'ovale, ed alcune sue estensioni, Atti Accad. Sci. Torino **70** (1935) S. 116—122. — Der vorstehende Beweis des Satzes, der (abgesehen von der Wendung ins räumliche) dem Beweise von W. Blaschke ähnelt, hat vielleicht den Vorteil, auf die Kugel ausdehnbar zu sein.

, $\mathfrak{x}_r'$ *mindestens dreimal* ein, d. h. die *Mittenkurve* $\bar{\mathfrak{x}}$ dieser isometrischen ıordnung der Eilinie zu sich selber hat *mindestens drei Spitzen.*

Bemerkung 2. Für den *isotropen Krümmungsstreifen*, der als para-ktisches Abbild der beiden isometrischen Eilinien $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ fungiert, be-eutet das Vorhandensein antiparalleler Tangentenpaare in der iso-etrischen Zuordnung der Eilinien ebenfalls eine Störung seiner Regu-rität. Weil nämlich diese Zuordnung an solchen Stellen im kleinen eine ntrische Symmetrie ist, muß sich dort der Streifen im kleinen wie ein egel verhalten, d. h. eine *Spitze* der *Trägerkurve* besitzen, die sich dann ben auch im Grundriß als Spitze der Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ auswirkt. Da die rägerkurve des isotropen Krümmungsstreifens eine orthogonale Trajek-rie der Erzeugenden der Torse des Streifens ist, tritt dies Ereignis mer dann ein, wenn die Streifenkurve $\mathfrak{x}$ auf die Gratlinie der Torse s Krümmungsstreifens auftrifft.

16. Sicherung der Eiform der Mittenkurve und der Regularität des rümmungsstreifens. Man kann nun die unangenehme Möglichkeit singu-rer Stellen des Krümmungsstreifens und ebenso den Übelstand einer icht eiförmigen Mittenkurve (der den glatten Ablauf des Beweisver-hrens von Herglotz be-indern würde) leicht da-urch beseitigen, daß man urch eine geeignete *Dre-ung* etwa der Eilinie $\mathfrak{x}_r$ egen $\mathfrak{x}_l$ das Auftreten ntiparalleler Tangenten $= \mathfrak{x}_l'$ und $\mathfrak{t}_r = \mathfrak{x}_r'$ der eiden isometrischen Ei-nien vermeidet. Ist aber er Tangentenwinkel $|2\omega|$ $= |\mathfrak{t}_l \mathfrak{t}_r| < \pi$, ω also auf as Intervall

89) $$-\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2}$$

eschränkt, so ist wegen os $\omega > 0$ die Krümmung der Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ nach 88) beschränkt und posi-iv; aus $\varkappa_l, \varkappa_r > 0$ folgt ämlich $0 < \varkappa < \infty$. $\bar{\mathfrak{x}}$ selbst st also, weil geschlossen, ine *Eilinie.*

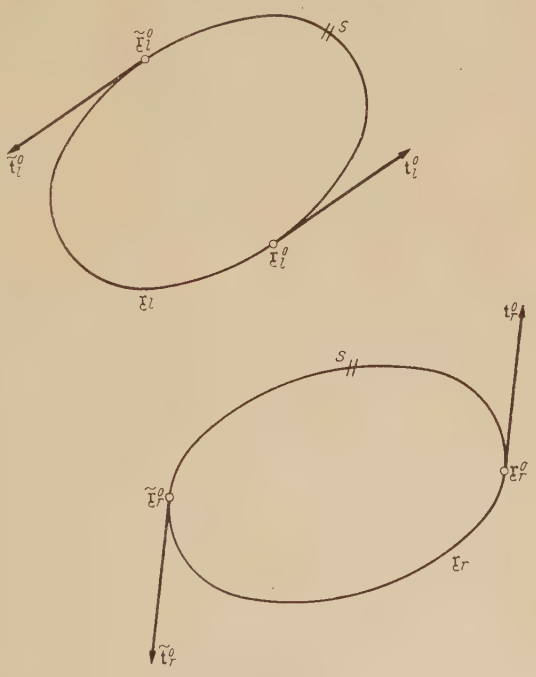

Fig. 3.

Die *Möglichkeit und Existenz einer solchen Drehung* beweisen wir, hnlich wie W. Blaschke (jedoch rein geometrisch) durch einen ein-achen Stetigkeitsschluß. Wir beweisen zuerst den folgenden Hilfssatz:

Satz 25. *Sind zwei umfangsgleiche Eilinien $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ gleichsinnig und längentreu aufeinander bezogen, so gibt es auf $\mathfrak{x}_l$ sicher mindestens ein Paar von Punkten $(\mathfrak{x}_l^0, \tilde{\mathfrak{x}}_l^0)$ mit antiparallelen Tangenten $(\mathfrak{t}_l^0 \uparrow\downarrow \tilde{\mathfrak{t}}_l^0)$, denen auf $\mathfrak{x}_r$ ein (isometrisches) Punktepaar $(\mathfrak{x}_r^0, \tilde{\mathfrak{x}}_r^0)$ mit gleichfalls antiparallelen Tangenten $(\mathfrak{t}_r^0 \downarrow\uparrow \tilde{\mathfrak{t}}_r^0)$ entspricht.*

Der Beweis kann ohne alle Rechnung so geführt werden: ordnen wir auf $\mathfrak{x}_l$ solche Punkte $\mathfrak{x}_l$ und $\bar{\mathfrak{x}}_l$ einander zu, deren Tangenten $\mathfrak{t}_l$ und $\bar{\mathfrak{t}}_l$ antiparallel sind, $\mathfrak{t}_l \uparrow\downarrow \bar{\mathfrak{t}}_l$, so werden ihnen auf $\mathfrak{x}_r$ in der Isometrie Punktepaare $\mathfrak{x}_r, \bar{\mathfrak{x}}_r$ entsprechen, deren Tangenten $\mathfrak{t}_r, \bar{\mathfrak{t}}_r$ den Winkel $\gamma = \widehat{\mathfrak{t}_r, \bar{\mathfrak{t}}_r}$ bilden mögen.

Betrachten wir eine bestimmte Ausgangslage, so wird

$$\gamma = \widehat{\mathfrak{t}_r \bar{\mathfrak{t}}_r} \begin{cases} = \pi \text{ oder} \\ \neq \pi \end{cases}$$

sein. Im ersten Falle ist $\mathfrak{t}_r \uparrow_{\downarrow} \bar{\mathfrak{t}}_r$ und der Existenzbeweis erledigt. Im zweiten Falle sei z. B. $\gamma = \widehat{\mathfrak{t}_l \bar{\mathfrak{t}}_r} < \pi$. Drehen wir dann das antiparallele Tangentenpaar $(\mathfrak{t}_l, \bar{\mathfrak{t}}_l)$ an $\mathfrak{x}_l$ um den Winkel π, d. h. solange, bis $\mathfrak{t}_l$ in die Lage $\bar{\mathfrak{t}}_l$ und $\bar{\mathfrak{t}}_l$ in die Lage $\mathfrak{t}_l$ kommt, so wird auch (wegen der Umfangsgleichheit) $\mathfrak{t}_r$ in die Lage $\bar{\mathfrak{t}}_r$ und $\bar{\mathfrak{t}}_r$ in die Lage $\mathfrak{t}_r$ gelangt sein. Der Winkel γ, der eine stetige Funktion des Bogens $s_l = s_r$ ist, hat dann den Wert $\bar{\gamma} = 2\pi - \gamma > \pi$ erreicht. Wegen der Stetigkeit von γ wird es dazwischen (mindestens) eine Lage mit $\gamma = \pi$ geben, d. h. eine solche Lage, wo sowohl $\mathfrak{t}_l \uparrow\downarrow \bar{\mathfrak{t}}_l$ als auch $\mathfrak{t}_r \uparrow\downarrow \bar{\mathfrak{t}}_r$ ist. Der Hilfssatz 25 ist damit bewiesen.

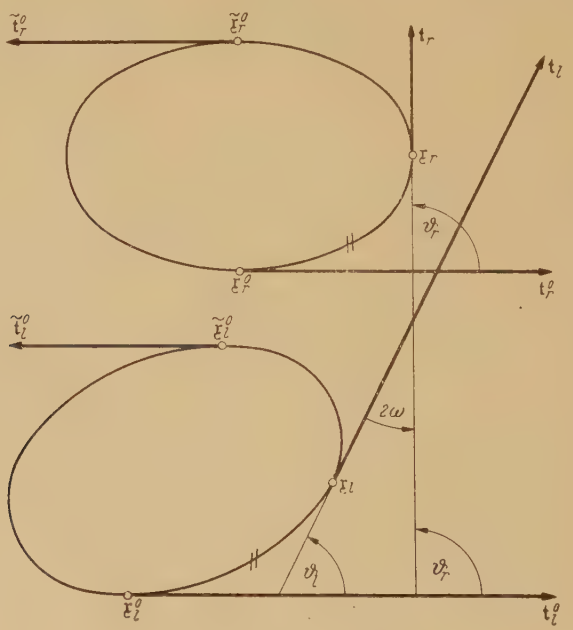

Fig. 4.

Durch Drehung von $\mathfrak{x}_r$ gegen $\mathfrak{x}_l$ kann nun (Fig. 4) erreicht werden, daß die diesen ausgezeichneten Punktepaaren $(\mathfrak{x}_l^0, \mathfrak{x}_r^0)$ und $(\tilde{\mathfrak{x}}_l^0, \tilde{\mathfrak{x}}_r^0)$ zuge-

rdneten Tangentenpaare parallel werden, d. h., daß

$$\mathfrak{t}_l^0 \downarrow\downarrow \mathfrak{t}_r^0 \uparrow\downarrow \tilde{\mathfrak{t}}_l^0 \downarrow\downarrow \tilde{\mathfrak{t}}_r^0$$

ird. Wir behaupten, daß dann $|\omega| < \frac{\pi}{2}$ *wird!*

Beweis: Durchlaufen wir nämlich dann mit dem Punkte $\mathfrak{x}_l$ einen der beiden eilbogen $\overset{\frown}{\mathfrak{x}_l^0 \mathfrak{x}_l^0}$ der linken Eilinie und isometrisch entsprechend mit dem Punkte $\mathfrak{x}_r$ en zugeordneten Teilbogen $\overset{\frown}{\mathfrak{x}_r^0 \tilde{\mathfrak{x}}_r^0}$ der rechten Eilinie, so *wachsen die Beträge der eigungen* ϑ_l und ϑ_r ihrer Tangenten $\mathfrak{t}_l$ und $\mathfrak{t}_r$ gegen die gemeinsame Anfangsichtung $\mathfrak{t}_l^0 = \mathfrak{t}_r^0$ auf jedem der isometrischen Teilbögen *monoton von 0 bis* π. lso gilt für den Winkel 2ω der Tangenten $\mathfrak{t}_l$, $\mathfrak{t}_r$ dem Betrage nach (wegen $\geqq \vartheta_r = \vartheta_l + 2\omega > 2\omega$, falls z. B. $\vartheta_r > \vartheta_l$ ist)

$$|2\omega| = |\vartheta_r - \vartheta_l| < \pi \text{ d. h. } |\omega| < \frac{\pi}{2}, \text{ w. z. b. w.}$$

Die Eiform der Mittenkurve $\bar{\mathfrak{x}}$ für die gedrehte Lage von $\mathfrak{x}_r$ und $\mathfrak{x}_l$ st damit *gesichert.*

Bemerkung 3. Im isotropen Raume bedeutet die alleinige Drehung er rechten Bildkurve nach Satz 4 eine bestimmte isotrope Liesche *Kugeltransformation*, welche auf den zugehörigen isotropen Krümmungsstreifen ausgeübt wird. Der dabei neu entstehende Streifen ist natürlich ieder ein isotroper *Krümmungsstreifen*, hat aber gegen vorhin eine *Eilinie als Grundriß* und ist völlig *frei von Singularitäten*. Insbesondere ist ach Formel (70) seine isotrope *Normalkrümmung*.

(90) $$\frac{1}{R} = \varkappa\vartheta = \operatorname{tang}\omega$$

egen $|\omega| < \frac{\pi}{2}$ *beschränkt.*

17. Isotrope Fassung des Vierscheitelsatzes 24. Nach dieser Vorbereiung zur Sicherung der Regularität der Figuren können wir Satz 24 über aare isometrischer Eilinien ohne weiteres auf die regulären periodischen Krümmungsstreifen des isotropen Raumes über eiförmigem Grundriß übertragen und mit räumlichen isotropen Mitteln beweisen. Satz 24 behauptete, daß zwei umfangsgleiche isometrische Eilinien $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$ indestens *vier* entsprechende Punktepaare gleicher Krümmung ($\varkappa_l$ $\varkappa_r$) esitzen, oder daß der Ausdruck $\varkappa_r - \varkappa_l$ (bei jedem Umlaufe) mindestens *vier* Nullstellen hat.

Nun ist für isotrope *Krümmungsstreifen* nach (75)

(91) $$\frac{\varkappa_r - \varkappa_l}{2} = \omega' \cdot \cos\omega = \frac{(\varkappa\vartheta)'}{(1 + \varkappa^2\vartheta^2)^{3/2}}$$

wobei nach (89) und (90) $\cos\omega > 0$ und $\varkappa\vartheta$ beschränkt ist.

Der Ausdruck $\varkappa_r - \varkappa_l$ wird also (in der Ebene gesprochen) überall dort und nur dort verschwinden, wo der Winkel $2\omega = \widehat{\mathfrak{t}_l \mathfrak{t}_r}$ entsprechender Tangenten extrem ($\omega' = 0$) ist, im isotropen Raume formuliert aber überall

dort und nur dort, wo die (beschränkte) *Normalkrümmung* $\frac{1}{R} = \varkappa\vartheta$ *des Krümmungsstreifens extrem* (stationär) ist. Es sind das die Stellen des Krümmungsstreifens, wo er von seiner isotropen MEUSNIER-Kugel stationär d. h. so berührt wird, daß drei benachbarte Flächenelemente auf dieser Kugel liegen. Wir sprechen dann auch von Scheitelelementen oder kurz *von Scheiteln des isotropen Krümmungsstreifens.*

Die in Satz 24 ausgesprochene Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes über umfangsgleiche Paare isometrischer Eilinien steckt also in dem folgenden (allgemeineren) *Vierscheitelsatz über periodische isotrope Krümmungsstreifen:*

Satz 26. Ein regulärer periodischer Krümmungsstreifen des isotropen Raumes, dessen Grundriß $\mathfrak{x}$ *eine einsinnig durchlaufene, von jedem Periodengange einfach überdeckte Eilinie* k $(\varkappa > 0)$ *ist und dessen (beschränkte) isotrope Normalkrümmung* $\frac{1}{R} = \varkappa\vartheta$ *einmal stetig differenzierbar ist, besitzt in jedem Periodengange mindestens vier Scheitel (mit stationär berührender isotroper* MEUSNIERscher *Kugel), d. h. vier Stellen mit stationärer Normalkrümmung* $(\varkappa\vartheta)' = 0$.

Bemerkung 4. Dieser Satz ist allgemeiner als der Satz 24, weil er auch Fälle umfaßt, in denen die zugehörigen isometrischen Linien $\mathfrak{x}_l$ und $\mathfrak{x}_r$ zwar geschlossen, aber nicht mehr konvex (Eilinien) sind. Aus den Formeln (72) und (73) folgt nämlich unter den jetzt gültigen Voraussetzungen, daß $\cos\omega > 0$ und $\varkappa\vartheta$ beschränkt ist, daß *die parataktischen Bilder* $\mathfrak{x}_l$ *und* $\mathfrak{x}_r$ *des isotropen Krümmungsstreifens in Satz 26 dann und nur dann eiförmig sind* $(\varkappa_l, \varkappa_r > 0)$, *wenn*

$$|\omega'| < \varkappa, \quad \text{d. h.} \quad |(\arctan \varkappa\vartheta)'| < \varkappa \tag{92}$$

ist.

Bemerkung 5. Den entsprechenden Vierscheitelsatz für (geschlossene) Krümmungsstreifen des euklidischen Raumes hat W. Süss angegeben und ähnlich dem Folgenden Jos. E. HOFMANN bewiesen[7]).

18. Räumlicher Beweis des Satzes. Beim Beweise des Satzes 26 genügt es wieder, die *isotrope Normalkrümmung* $\frac{1}{R} = \varkappa\vartheta$ des periodischen Krümmungsstreifens als *nicht konstant* vorauszusetzen. Wir schließen dadurch nur den Trivialfall der (geschlossenen) sphärischen und ebenen Streifen des isotropen Raumes mit eiförmigem Grundriß aus. Solche Streifen haben nämlich nach Ziffer 4 zwei gleichsinnig kongruente parataktische Bildkurven $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}_r$. In der Tat folgt aus $\frac{1}{R} = \tan\omega = \text{const.}$ sofort $\omega' = 0$, also nach (91) $\varkappa_r(s) \equiv \varkappa_l(s)$, d. h. gleichsinnige Kongruenz der Kurven $\mathfrak{x}_r$ und $\mathfrak{x}_l$.

[7]) W. SÜSS, Aufgabe 56 im Jahresber. Deutsch. Math. Ver. — Lösung von J. E. HOFMANN, ebenda 38 (1929), S. 76/77 kursiv.

Wenden wir wieder das indirekte Beweisverfahren von G. Herglotz n, so folgt aus der Annahme lediglich der beiden Weierstrassschen Extreme der (beschränkten) Normalkrümmung $\frac{1}{R}$ die Existenz einer Geaden f der Gleichung

93) $$f = ax + by + c = \bar{\mathfrak{a}}\bar{\mathfrak{x}} + c = 0,$$

welche den eiförmigen Grundriß k eines Periodenganges des Krümmungsstreifens so in zwei Teile k_+ und k_- trennt, daß auf jedem von ihnen der Ausdruck $f \cdot \left(\frac{1}{R}\right)'$ *festes Zeichen* hat. Also müßte das Kurvenintegral

$$\oint_k f \cdot \left(\frac{1}{R}\right)' \cdot ds \neq 0$$

ein, im Widerspruch zu seinem wahren Wert, der nämlich 0 ist.

In der Tat ist wegen der Periodizität des Ortsvektors $\bar{\mathfrak{x}}(s)$ des Streifengrundrisses, der Normalkrümmung $\frac{1}{R(s)}$ und des Ortsvektors des isotropen sphärischen Bildes $\mathfrak{X}(s)$, wenn u den Umfang des Grundrisses bezeichnet, also wegen

94) $$\bar{\mathfrak{x}}(s+u) = \bar{\mathfrak{x}}(s), \quad \frac{1}{R(s+u)} = \frac{1}{R(s)}, \quad \mathfrak{X}(s+u) = \mathfrak{X}(s)$$

zunächst

$$\oint_k f \cdot \left(\frac{1}{R}\right)' ds = c \cdot \oint_k \left(\frac{1}{R}\right)' ds + \bar{\mathfrak{a}} \cdot \oint_k \bar{\mathfrak{x}} \left(\frac{1}{R}\right)' ds.$$

Nun ist nach (94) das erste Integral rechter Hand gleich 0, und wenn wir das zweite nach Teilen integrieren und die für Krümmungsstreifen gültige Formel von Rodrigues (48, links) heranziehen, sehen wir, daß auch das zweite Integral gleich 0 ist. Wirklich ist

$$\oint_k \bar{\mathfrak{x}} \left(\frac{1}{R}\right)' ds = \bar{\mathfrak{x}} \frac{1}{R}\Big|_{s=0}^{s=a} - \oint_k \frac{1}{R} \bar{\mathfrak{x}}' ds = 0 - \oint_k \bar{\mathfrak{X}}' ds = 0.$$

Damit ist in jedem Periodengange des Krümmungsstreifens die Existenz von mindestens vier Scheiteln gesichert und mit Satz 26 auch Satz 24 bewiesen.

Bemerkung 6. Daß die Minimalzahl von vier Scheiteln bei regulären isotropen Krümmungsstreifen, die periodisch über eiförmigem Grundriß errichtet sind, wirklich erreicht wird, zeigt bereits der Fall des (geschlossenen) *Böschungsstreifens durch eine Ellipse der Bildebene*. Für einen solchen sind (weil ϑ konstant $= \vartheta_0$, also $\frac{1}{R} = \vartheta_0 \cdot \varkappa$ ist) die Endpunkte der Hauptachsen (und nur sie) isotrope Scheitel. Durch parataktische Abbildung erhält man in der Ebene als *Minimalbeispiel zu Satz 24 zwei Äquitangentialkurven der Ellipse*, die zu gegengleichen Tangentenstrecken gehören. Diese Äquitangentialkurven sind nicht notwendig konvex, sie werden es aber, wenn die Tangentenstrecke im Verhältnis zu den Dimensionen der Ellipse genügend groß gewählt wird. Unabhängig davon aber gibt es auf diesen Kurvenpaaren, die durch die Konstruktion notwendig aufeinander iso-

metrisch bezogen sind, genau vier (den Ellipsenscheiteln entsprechende) Punkte paare mit gleichen Krümmungen ($\varkappa_l = \varkappa_r$).

Bemerkung 7. Der elementare Vierscheitelsatz für einzelne Eilinie ist in Satz 24 als Sonderfall enthalten. Man muß nur eine der umfangsgleiche Eilinien wieder als Kreis wählen und wie im vorigen Abschnitt (Bemerkung 2 schließen.

IX. Eilinien und Flächen der festen isotropen Relativkrümmung $K = rt - s^2 = -1$.

19. Allgemeines. Das Pfaffsche System der Flächenelemente $E(x, y, z, p, q)$, welches durch die Gleichungen

$$\begin{cases} p = p(x, y) \\ q = q(x, y) \end{cases} \tag{95}$$

beschrieben wird (und daher gegen vollisotrope Schiebungen unempfindlich ist), erzeugt durch seine parataktische Abbildung eine *Verwandtschaft* $E_l \succ E_r$ zwischen dem linken und rechten Bildfelde, wobei gilt:

$$E_l \begin{cases} x_l = x + q(x, y), \\ y_l = y - p(x, y), \end{cases} \qquad E_r \begin{cases} x_r = x - q(x, y), \\ y_r = y + p(x, y). \end{cases} \tag{96}$$

Um die Art der Verwandtschaft zu erkennen, berechnen wir die beiden Funktionaldeterminanten

$$\begin{cases} \frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(x, y)} = 1 + (p_y - q_x) + (p_x q_y - p_y q_x), \\ \frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)} = 1 - (p_y - q_x) + (p_x q_y - p_y q_x). \end{cases} \tag{97}$$

Diese sind dann und nur dann einander gleich, d. h. die *Verwandtschaft* $E_l \succ E_r$ ist dann und nur dann *eigentlich-flächentreu*, wenn

$$p_y = q_x \tag{98}$$

ist, oder wenn der Ausdruck

$$p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy \tag{99}$$

ein vollständiges Differential $dz(x, y)$ ist. Die *Pfaffsche Mannigfaltigkeit* (95) ist dann *integrabel*, d. h. sie besteht aus den Berührungselementen eines *Systems von Flächen*, welche durch vollisotrope Schiebungen auseinander hervorgehen, d. h. im isotropen Sinne zueinander *parallel* sind. Damit ist bewiesen:[8])

Satz 27. *Die parataktischen Bilder eines Pfaffschen Systems* (95) *von Flächenelementen sind dann und nur dann eigentlich-flächentreu aufeinander bezogen, wenn es aus den Berührungselementen einer Fläche der Form*

$$z = z(x, y) + \text{const.} \tag{100}$$

besteht.

[8]) G. Scheffers, Flächentreue Abbildungen in der Ebene. Math. Zeitschr. **2** (1918), S. 180—186.

Für eine solche Fläche ist nach (97)

01) $$\frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)} = 1 + rt - s^2.$$

Der Ausdruck

02) $$K = rt - s^2$$

t eine wichtige *isotrope Invariante* der Fläche, ihre sogenannte *Relativ-rümmung*. Es ist

03) $$K = \frac{1}{R_1 R_2},$$

enn $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ die (zu den beiden orthogonalen isotropen Krüm-ungsstreifen gehörenden) isotropen *Hauptnormalkrümmungen* des lächenpunktes bezeichnen.

Uns interessiert nun vor allem der Fall, wo die parataktischen ilder E_l, E_r der Berührungselemente E der Fläche (100) lediglich aus wei Kurven c_l, c_r bestehen (die auch zusammenfallen dürfen). Not-endig und hinreichend dafür ist das Verschwinden der Funktional-eterminanten (101). Es folgt

Satz 28. *Die Flächen $z = z(x, y)$ der festen isotropen Relativ-rümmung $K = rt - s^2 = -1$, und nur sie, haben kurvenhafte arataktische Bilder. Irgend zwei Kurven c_l, c_r, deren keine punktför-ig ist, d. h. im isotropen Raume irgend ein Streifen, der kein Schmieg-treifen der festen isotropen Torsion $\tau = \pm 1$ ist, bestimmt eindeutig ine Fläche der festen Relativkrümmung $K = -1$.*

Aus ihrem parataktischen Bilde kann man eine einfache allgemeine eometrische *Erzeugungsweise* dieser Flächen entnehmen, die z. B. uch in der Affinen Differentialgeometrie als sogenannte *uneigentliche ffinsphären* eine wichtige Rolle spielen. Jeder feste Punkt E_l der inken Bildkurve c_l bestimmt nämlich zusammen mit allen Punkten E_r er rechten Bildkurve c_r nach Ziff. **5**, Bem. 1 einen Schmiegstreifen σ_l us einem Linksgewinde der festen Torsion $\tau = -1$. Verschiebt man E_l im linken Bildfelde längs der Kurve c_l, so erfährt der Schmieg-treifen σ_l nach Satz 3 eine isotrope Linksschiebung und beschreibt dabei die gesuchte Fläche. Ebenso bestimmen die einzelnen Punkte E_r von c_r zusammen mit der Kurve c_l Schmiegstreifen σ_r aus Rechts-gewinden mit der festen Torsion $\tau = +1$, welche auseinander durch Rechtsschiebung hervorgehen. Es folgt

Satz 29. *Der Liesche Elementverein jeder Fläche der festen iso-ropen Relativkrümmung $K = rt - s^2 = -1$ kann geometrisch durch sotrope Clifford'sche Schiebungen erzeugt werden, indem man von wei inzidenten Schmiegstreifen σ_l, σ_r der festen isotropen Torsionen $= -1$ bzw. $\tau = +1$ ausgehend, entweder σ_l linksseitig längs σ_r oder σ_r rechtsseitig längs σ_l verschiebt. Die einzelnen Lagen der Schmieg-treifen σ_l und σ_r ergeben die beiden Scharen von Asymptotenlinien der Fläche.*

20. Die der Eilinie c zugeordnete Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$. Es sei in der Bildebene π eine *Eilinie* c gegeben. Wir denken sie überdeckt von zwei Kurven $c_l = c_r = c$, die wir als parataktische Bilder einer Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ auffassen und der Eilinie c zuordnen wollen. Die Flächenelemente dieser Fläche Φ haben also parataktische Bilder E_l, E_r die unabhängig voneinander auf c gewählt werden können.

Wählt man $E_l = E_r$, so fällt das Flächenelement E von Φ mit dem Schmiegelement E von c zusammen, d. h. *die Fläche Φ enthält die ebenen Schmiegstreifen der Eilinie c.* Da man die Elementenpaare (E_l, E_r) in (E_r, E_l) vertauschen darf, ist *Φ bezüglich der Bildebene symmetrisch. Die Eilinie c ist also notwendig Rückkehrkante der Fläche Φ.*

Es ist leicht, die Fläche Φ analytisch anzugeben. Lautet die ebene Kurve c, durch den Parameter t beschrieben,

$$c\ldots,\quad x = x(t),\ y = y(t), \tag{104}$$

so ist für ihren Schmiegstreifen $z = p = q = 0$, und man kann das parataktische Bildpaar c_l, c_r mittels zweier Parameter u, v so ansetzen

$$c_l\begin{cases} x_l = x(v) \\ y_l = y(v), \end{cases} \qquad c_r\begin{cases} x_r = x(u) \\ y_r = y(u). \end{cases} \tag{104}$$

Daraus gewinnt man nach (9) sofort die folgende *Darstellung der Fläche Φ*:

$$\Phi\begin{cases} x = \frac{1}{2}[x(u) + x(v)] & p = -\frac{1}{2}[y(u) - y(v)] \\ y = \frac{1}{2}[y(u) + y(v)] & q = \frac{1}{2}[x(u) - x(v)] \\ z = \int_v^u p\,dx + q\,dy = \frac{1}{4}\left\{\int_u^v (x\,dy - y\,dx) - [x(u)\,y(v) - x(v)\,y(u)]\right\} \end{cases} \tag{105}$$

Für $u = v = t$ erhält man den Schmiegstreifen der ebenen Rückkehrkurve c. Die u- und v-Linien sind die *Asymptotenlinien* der Fläche.

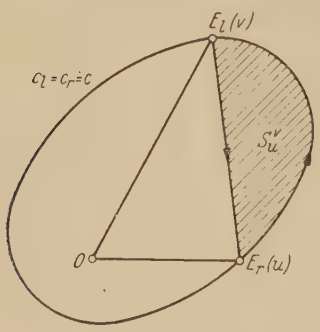

Fig. 5.

Die Formel für z läßt wieder eine einfache *geometrische Deutung* zu (Fig. 5). Das Integral rechter Hand stellt nämlich die doppelte Fläche des *Sektors* $\widehat{OE_rE_l}$, die eckige Klammer die doppelte Fläche des *Dreiecks* (OE_rE_l) dar. Es folgt

$$\boxed{z = \tfrac{1}{2} S_u^v,} \tag{106}$$

wenn S_u^v *die Fläche des Segmentes* der Kurve c bezeichnet, das über der Sehne $\overline{E_r(u)\,E_l(v)}$ aufruht.

Bemerkung 1. Dieses einfache Ergebnis kann natürlich auch aus Satz 9 folgert werden. Legen wir nämlich in irgend einer horizontalen d. h. zur Bildene π parallelen Richtung r an die Fläche Φ den *Berührungszylinder*, so berührt längs jener Kurve k *(Eigenschattengrenze für r)*, welche den Ort k der Sehnenitten dieser Richtung r als Grundriß hat. Die einzelnen parallelen Sehnen $E_l E_r$ hneiden die Kurve c in den parataktischen Bildpunkten der Flächenelemente E eser Eigenschattengrenze k. Wählt man als Ausgangssehne $E_l^0 E_r^0$ die Tangente t^0 r Richtung r, so stimmt der durch die Formel (21) dargestellte Flächeninhalt F nau mit dem Inhalte S_u^v des Segmentes überein, welches die Sehne $\overline{E_l E_r}$ von r Kurve c abschneidet.

Man erhält so die folgende einfache *elementargeometrische Konruktion der Fläche* Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$, welche er ebenen Kurve c zugeordnet ist[9]).

Satz 30. *Es sei* $(E_r(u)\, E_l(v))$ *ein beliebiges Punktepaar auf der Einie* c *und* S_u^v *das Segment, das seine Sehne von* c *abschneidet. Trägt an dann im Sehnenmittelpunkte* $\bar{E}$ *die Maßzahl der halben Fläche des egmentes* S_u^v *als z-Kote auf, so durchläuft der Endpunkt P jene Fläche der festen Relativkrümmung* $K = -1$, *deren* Liescher *Elementverein ch auf die (doppeltüberdeckte) Kurve* $c = c_l = c_r$ *abbildet. Diese der ilinie* c *zugeordnete Fläche* Φ *ist zur Bildebene* π *symmetrisch und at die Eilinie selber als ebene Rückkehrkante. Die Fläche* Φ *ist eriodisch in z mit der Periode (Ganghöhe)*

$$h = \tfrac{1}{2} F, \tag{107}$$

enn F den Flächeninhalt der Eilinie bedeutet.

Die zuletzt genannte Eigenschaft erkennt man sofort, wenn man inen der beiden Bildpunkte eines Flächenelementes E von Φ auf c fest ält und den anderen die Eilinie c umlaufen läßt.

Aus dieser Konstruktion von Φ folgt der für uns wichtige

Satz 31. *Wird die Sehne* $\overline{E_l E_r}$ *innerhalb der Eilinie* c *so bewegt, aß sie von ihr stets Segmente festen Inhalts* S_u^v *abschneidet, o entspricht ihren Lagen im Raume parataktisch eine Schichtenlinie (ein Schichtenstreifen) auf der* c *zugeordneten Fläche* Φ, *ie in der Höhe* $z = \frac{1}{2} S_u^v$ *über der Ebene von* c *liegt.*

Weil für die Schichtenlinie $dz = p\,dx + q\,dy = 0$ *ist, berühren ie Sehnen* $\overline{E_l E_r}$ *die Kurve E ihrer Mittelpunkte.*

Man kann an Hand der Eilinie c sehr leicht die *Grundrisse der Asymptotenlinien* und der isotropen *Krümmungslinien* der Fläche Φ angeben.

Die Asymtotenlinien von Θ haben nach den Überlegungen vor Satz 29 esten linken oder rechten Bildpunkt, während der jeweils andere Bildunkt der Eilinie c durchläuft. Durch Übergang zu den Sehnenmittelunkten folgt der

Satz 32. *Die Grundrisse der Asymptotenlinien der Fläche* Φ, *er festen Relativkrümmung* $K = -1$, *welche der Eilinie* c *zugeordnet*

[9]) Vgl. G. Scheffers, Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{konst}$. Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 112—117.

ist, erhält man, indem man die Eilinie c aus ihren Punkten im Ver hältnis 1 : 2 verkleinert. Die Schiebschar[9]) *dieser Kurven umhüllt außer der Eilinie c noch eine weitere Kurve* $\bar{k}$, *nämlich den Ort der Mitten jener Sehnen* $E_l E_r$, *welche die Berührungspunkte paralleler Tangenten von c verbinden.*

Dieser Mittenort $\bar{k}$ der Sehnen, welche zu parallelen Tangenten von gehören, kann a) ein Punkt K sein; die Eilinie c hat dann einen Mittelpunkt. Oder er kann b) eine wirkliche *Kurve* (mit wenigstens drei Spitzen) sein, wenn die Eilinie keinen Mittelpunkt hat. Der zugehörige Berührungsstreifen auf der Fläche Φ ist dann im Falle a) ein *Elementarkegel* (der sich ebenso wie Φ periodisch wiederholt), im Falle b aber ein geschlossener, ebenfalls periodisch wiederholter *singulärer Schmiegstreifen*, der (ähnlich dem Schmiegstreifen der Rückkehrkante c von den beiden Scharen der regulären Schmiegstreifen σ_l, σ_r der Fläche Φ eingehüllt wird. Dieser singuläre Schmiegstreifen k besteht in jedem Gange der periodischen Fläche Φ, der von zwei ebenen Rückkehrkanten c und c' begrenzt ist, aus einer einzügigen Kurve mit mindestens sechs Spitzen, die zur Mittenebene des Ganges symmetrisch ist.

Die beiden Scharen der isotropen *Krümmungslinien* der Fläche Φ haben nach Satz 18 als parataktische Bilder die $2 \cdot \infty^1$ *isometrischen Beziehungen der Eilinie c auf sich selbst*, wobei der einen Schar die gleichsinnig-, der anderen Schar die ungleichsinnig-kongruenten Beziehungen von c entsprechen. *Diese Krümmungslinien sind dabei im gleichsinnigen Falle (wegen* $F_l = F_r$*) geschlossen, im ungleichsinnigen Falle aber nur periodisch und offen.*

Entsprechende Punkte E_l, E_r zweier gleichsinnig-kongruenter Punktreihen auf der Eilinie c differieren um feste Bogenstücke. Also folgt

Satz 33. *Wird die (variable) Sehne in der Eilinie c so herumgeführt, daß sie auf c feste Bogenstücke abschneidet, so entspricht ihr im Raume parataktisch ein geschlossener isotroper Krümmungsstreifen auf der durch die Eilinie c bestimmten Fläche* Φ *der festen Relativkrümmung* $K = -1$.

Im *Grundrisse* erhält man die isotropen *Krümmungslinien von* Φ sofort als *Örter der Sehnenmitten der gleich- bzw. gegensinnig-isometrischen Abbildungen der Eilinie c auf sich selber*. Diese beiden Kurvenscharen bilden ein *in die Eilinie c eingebettetes Orthogonalsystem*, dessen eine (dem gleichsinnigen Falle entsprechende) Schar aus lauter *geschlossenen Linien besteht*, unter denen c selber als Randkurve vorkommt, während die zweite (dem ungleichsinnigen Falle entsprechende) Schar aus *offenen Transversalen der Eilinie c* besteht, welche solche Punktepaare von c verbinden, die um den halben Eilinienumfang $\frac{1}{2}U$ differieren.

Wir erwähnen noch den aus Ziffer **5**, Beispiel 4 folgenden

Satz 34. *Wird eine Sehne fester Länge* $E_l E_r = 2a = \text{const.}$ *in der Eilinie c herumgeführt, so entspricht ihr auf der durch c bestimmten*

Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ ein geschlossener Böschungsstreifen der gegen die Ebene π von c unter dem festen isotropen Winkel $\vartheta = a$ geneigt ist.

Wir bezeichnen auch im isotropen Raume als Fallstreifen gegen die Bildebene π jene, welche durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} p & q \\ dx & dy \end{vmatrix} = 0 \tag{108}$$

gekennzeichnet sind. Für sie folgt leicht

Satz 35. *Wird die (variable) Sehne E_1E_2 so in der Eilinie c herumgeführt, daß sie ihren Mittenort orthogonal durchsetzt, so beschreibt das entsprechende Flächenelement E auf der durch c bestimmten Fläche Φ einen Fallstreifen.*

Zusammenfassend haben wir folgendes parataktische Entsprechen zwischen Sehnenörtern der Eilinie c und Streifen (Kurven) auf der durch c bestimmten Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ gefunden:

Eilinie c	Fläche Φ
1) Sehnen, welche auf c Segmente fester Fläche abschneiden (oder welche ihren Mittenort berühren).	Geschlossener Schichtenstreifen auf Φ.
2) Sehnen, welche auf c gleiche Bogen abschneiden.	Geschlossener isotroper Krümmungsstreifen auf Φ.
3) Sehnen von c, welche feste Länge haben.	Geschlossener Böschungsstreifen auf Φ.
4) Sehnen von c, deren Endpunkte parallele Tangenten aufweisen.	Geschlossener (singulärer) Asymptotenstreifen auf Φ (Hüllgebilde der regulären Asymptotenstreifen). Im Falle einer Mittelpunktskurve c: Elementarkegel.
5) Sehnen von c, welche ihren Mittenort orthogonal durchsetzen.	Offener Fallstreifen auf Φ.

X. Das Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung.

21. Definition der Elementenschwenkung. Es sei $E(x, y, z + c, p, q)$ ein bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmtes Flächenelement des isotropen Raumes. Wir wollen ihm das ebenfalls nur bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmte Flächenelement $\tilde{E}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + \tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{q})$ zuordnen,

dessen Koordinaten durch die Formeln

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, & \tilde{p} = -q, \\ \tilde{y} = y, & \tilde{q} = p, \\ \tilde{z} = \text{beliebig}, \end{cases} \tag{109}$$

bestimmt sind. Die Transformation (109) der Flächenelemente nennen wir eine *Elementenschwenkung.* Es folgt

Satz 36. *Durch Elementenschwenkung entspricht einem Flächenelement E ein anderes $\tilde{E}$ (die beide nur bis auf vollisotrope Schiebungen bestimmt sein müssen), das mit ihm denselben Grundriß $\bar{E} = (x, y)$ hat, so zwar, daß $\tilde{E}$ aus E durch positive Vierteldrehung um die gemeinsame (vollisotrope, d. h. z-parallele) Normale der beiden Flächenelemente entsteht. Das isotrope sphärische Bild von E erfährt dabei ebenfalls eine positive Vierteldrehung. E und $\tilde{E}$ sind dabei gegen die Bildebene π unter gleichem isotropen Winkel geneigt.*

Dem Streifen

$$\mathfrak{x} \dots x(s), y(s), z(s) = \int p\,dx + q\,dy,\ p(s),\ q(s) \tag{110}$$

entspricht durch Elementenschwenkung der Streifen

$$\tilde{\mathfrak{x}} \dots \begin{cases} \tilde{x} = x(s), & \tilde{p} = -q(s), \\ \tilde{y} = y(s), & \tilde{q} = p(s), \\ \tilde{z} = \int \tilde{p}\,d\tilde{x} + \tilde{q}\,d\tilde{y} = \int p\,dy - q\,dx. \end{cases} \tag{111}$$

Man stellt leicht fest, daß diese (nach keiner Richtung eindeutige) Elementenschwenkung keine Berührungstransformation ist. Schwenkt man nämlich die Berührungselemente E einer Schar paralleler Flächen

$$z = z(x, y) + \text{const.} \tag{112}$$

so erhält man Flächenelemente $\tilde{E}$, aus denen man i. a. nicht wieder eine parallele Flächenschar $\tilde{z} = \tilde{z}(x, y) + \text{const.}$ zusammensetzen kann. Vielmehr wird i. a. eine nicht integrable Pfaffsche Mannigfaltigkeit von Flächenelementen $\tilde{E}$ entstehen, also das, was man auch eine anholonome Fläche genannt hat.

Z. B. erhält man aus den Flächenelementen E der isotropen Kugeln

$$z = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + \text{const.} \tag{113}$$

die Flächenelemente $\tilde{E}$ des Gewindes

$$dz = A(x\,dy - y\,dx) - C\,dx + B\,dy. \tag{114}$$

Daraus folgt, daß einem isotropen *sphärischen Streifen* (isotropen Krümmungsstreifen der festen Normalkrümmung $\varkappa\vartheta = \frac{1}{R} = A$) durch Elementenschwenkung ein *Nullstreifen* (Schmiegstreifen der festen isotropen Torsion $\tilde{\tau} = A$) entspricht.

Eine Fläche (integrable Pfaffsche Mannigfaltigkeit) entsteht vielmehr aus der Fläche (112) durch Elementenschwenkung dann und nur dann, wenn der Ausdruck

(115) $$d\tilde{z} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x} + \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{y} = p(x,y)\, dy - q(x,y)\, dx$$

ein vollständiges Differential ist, also dann und nur dann, wenn

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}$$

oder wenn der Laplace-Ausdruck

(116) $$2H = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

ist. Nun ist dieser Ausdruck

(117) $$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

die isotrope mittlere Krümmung der Fläche. Ihr Verschwinden kennzeichnet die isotropen Minimalflächen, die man als Integralflächen von (116) bekanntlich stets in der Form

(118) $$z = \Re f(x + iy)$$

darstellen kann, unter $f(x + iy)$ eine beliebige komplexe analytische Funktion der komplexen Variablen $(x + iy)$ verstanden.

Für die Berührungselemente E der Minimalfläche (118) ist nun

$$p + iq = \overline{f}'(x - iy),$$

woraus sich

$$\tilde{p} + i\tilde{q} = -q + ip = if'(x - iy)$$

und

(119) $$\tilde{z} = \Re[-i.f(x+iy)] = \Im f(x+iy)$$

als Gleichung der Minimalfläche ergibt, welche aus (118) durch Elementenschwenkung entsteht. Es ist dies die sogenannte *konjugierte* isotrope Minimalfläche zu (118).

Es gilt also

Satz 37. *Die Elementenschwenkung $E \rightarrow \tilde{E}$ führt i. a. den Lieschen Elementverein einer Fläche* (112) *und ihrer isotropen Parallelflächen über in eine nicht integrable Pfaffsche Mannigfaltigkeit von Flächenelementen (anholonome Fläche). Lediglich aus einer Parallelschar isotroper Minimalflächen* (118) *entsteht durch Elementenschwen-*

kung immer wieder eine neue Parallelschar von Flächen (integrablen PFAFFsche Mannigfaltigkeiten), nämlich die Parallelschar der dazu konjugierten isotropen Minimalflächen (119).

Da man durch jeden im isotropen Raume regulären analytischen Streifen, der für die LAPLACEsche Gleichung nicht charakteristisch ist, also z. B. durch jeden reellen regulären analytischen Streifen genau eine isotrope Minimalfläche legen kann (Gegenstück des BJÖRLINGschen Problems), folgt aus Satz 37 noch

Satz 38. *Legt man durch zwei Streifen $\mathfrak{x}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}$, die einander durch Elementenschwenkung entsprechen, die möglichen isotropen Minimalflächen, so erhält man notwendig zwei zueinander konjugierte isotrope Minimalflächen. Von vollisotropen Schiebungen ist dabei stets abgesehen.*

22. Einige wichtige Eigenschaften der Elementenschwenkung. Aus Satz 36 folgt, daß durch Elementenschwenkung einander Streifen $\mathfrak{x}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}$ zugeordnet sind, deren Grundrisse identisch, deren isotrope sphärische Bilder $\mathfrak{X}$ und $\tilde{\mathfrak{X}}$ aber gegeneinander um einen rechten Winkel gedreht sind. Wir folgern daraus den wichtigen

Satz 39. *Durch Elementenschwenkung entspricht einem Schmiegstreifen ein isotroper Krümmungsstreifen und umgekehrt.*

In der Tat ist nach Satz 13 für einen Schmiegstreifen $\mathfrak{X}' \mid \mathfrak{h}$ kennzeichnend, woraus durch Elementenschwenkung ein Streifen entsteht, für welchen $\tilde{\mathfrak{X}}' \perp \tilde{\mathfrak{h}}$ oder $\tilde{\mathfrak{X}}' \mid \tilde{\mathfrak{t}}$ ist; dies ist aber für isotrope Krümmungsstreifen kennzeichnend. Ebenso folgt die Umkehrung.

Satz 39 steckt als Sonderfall in dem folgenden allgemeinen

Satz 40. *Zwischen den drei isotropen Grundinvarianten zweier Streifen $\mathfrak{x}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}$, die durch Elementenschwenkung auseinander hervorgehen, bestehen die Gleichungen:*

$$\boxed{\begin{aligned} \varkappa &= \tilde{\varkappa}, \\ \varkappa\vartheta &= \tilde{\tau} - \tilde{\vartheta}', \\ \tau - \vartheta' &= -\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta}. \end{aligned}} \tag{120}$$

Beweis. Die erste Gleichung ist wegen des gemeinsamen Grundrisses der beiden Streifen trivial. — Die zweite und dritte folgen aus (111) leicht in der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= dp\,dx + dq\,dy = \quad d\tilde{q}\,d\tilde{x} - d\tilde{p}\,d\tilde{y} = \quad \widetilde{\mathrm{IV}}, \\ \mathrm{IV} &= dq\,dx - dp\,dy = -(d\tilde{p}\,d\tilde{x} + d\tilde{q}\,d\tilde{y}) = -\widetilde{\mathrm{II}}. \end{aligned} \tag{121}$$

Es folgt noch

Satz 41. *Durch das Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung entspricht, wie erwähnt, einem isotropen Krümmungsstreifen $\mathfrak{x}$ ($\tau - \vartheta' = 0$) ein Schmiegstreifen $\tilde{\mathfrak{x}}$ ($\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta} = 0$) und umgekehrt. Dabei ist einem Scheitel des Krümmungsstreifens [d. h. einer Stelle mit*

ationärer isotroper Normalkrümmung $(\varkappa\vartheta)' = 0$] *stets ein „Scheitel" s Schmiegstreifens* [*d. h. eine Stelle mit stationärer isotroper Torsion* $\tilde{\tau} = \tilde{\vartheta}')' = \tilde{\tau}' = 0$] *zugeordnet und umgekehrt.*

Die räumlichen Vierscheitelsätze 20. und 26. können also durch as Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung auseinander gelgert werden.

Es gilt ferner

Satz 42. *Durch Elementenschwenkung entspricht einem Schichtenstreifen bezüglich* π *ein Fallstreifen bezüglich* π *und umgekehrt. Einem Böschungsstreifen gegen* π *aber entspricht wieder ein gleichartiger Böschungsstreifen.*

In der Tat folgt aus $p\,dx + q\,dy = 0$ (Schichtenstreifen) sofort $dx - p\,dy = 0$ (Fallstreifen) und umgekehrt.

Beispiel 1. Aus den Sätzen 37. und 38. ergibt sich, daß auf zwei onjugierten isotropen Minimalflächen einander sowohl die Schichtenlinien nd Fallinien als auch die isotropen Krümmungslinien und Asymptotenlinien wechselweise durch Elementenschwenkung entsprechen.

Indem wir unser Übertragungsprinzip der Elementenschwenkung auf den Satz von Joachimsthal über ebene isotrope Krümmungsstreifen (Satz 12) anwenden, erhalten wir das folgende Satzpaar:

Satz 43. *Besitzt ein Streifen* $\mathfrak{x}$ *bzw.* $\tilde{\mathfrak{x}}$ *des isotropen Raumes irgend zwei der folgenden drei Eigenschaften:*

1. $\mathfrak{x}$ *ist Schichtenstreifen bezüglich* π	1. $\tilde{\mathfrak{x}}$ *ist Fallstreifen bezüglich* π
2. $\mathfrak{x}$ *ist Böschungsstreifen bezüglich* π	2. $\tilde{\mathfrak{x}}$ *ist Böschungsstreifen bezüglich* π
3. $\mathfrak{x}$ *ist isotroper Krümmungsstreifen,*	3. $\tilde{\mathfrak{x}}$ *ist Schmiegstreifen,*

so besitzt er auch die dritte Eigenschaft.

Vorausgesetzt ist dabei, daß a) kein konischer Streifen (Elementarkegel) vorliegt, in welchem Falle aus 3. und 1. nicht 2. folgt, und daß b) kein ebener Schmiegstreifen in einer gegen π *geneigten Ebene vorliegt, in welchem Falle aus 2. und 3. nicht 1. folgt.*

In der Tat sind diese drei Eigenschaften der Reihe nach durch die Gleichungen

1.	$\begin{vmatrix} dx & dy \\ -q & p \end{vmatrix} = 0$	1.	$\begin{vmatrix} d\tilde{x} & d\tilde{y} \\ \tilde{p} & \tilde{q} \end{vmatrix} = 0$
2.	$\begin{vmatrix} -q & p \\ -dp & -dq \end{vmatrix} = 0$	2.	$\begin{vmatrix} \tilde{p} & \tilde{q} \\ -d\tilde{q} & -d\tilde{p} \end{vmatrix} = 0$
3.	$\begin{vmatrix} -dp & -dq \\ dx & dy \end{vmatrix} = 0$	3.	$\begin{vmatrix} -d\tilde{q} & d\tilde{p} \\ d\tilde{x} & d\tilde{y} \end{vmatrix} = 0$

ausgedrückt und aus zweien davon folgt stets die dritte; ausgenommen a) den Fall, wo $dx = dy = 0$ (bzw. $d\tilde{x} = d\tilde{y} = 0$) ist, wo man aus 2. und 1. nicht auf 2. schließen kann, und b) den Fall, daß $dp = dq =$ (bzw. $d\tilde{p} = d\tilde{q} = 0$) ist, wo aus 2. und 3. i. a. nicht mehr 1. folgt, sei denn, daß außerdem noch $p = q = 0$ (bzw. $\tilde{p} = \tilde{q} = 0$) wäre.

Jeder dieser beiden Sätze 43 kann aus dem anderen durch Elementen schwenkung gewonnen werden. Wir werden im nächsten Abschnitt die Bedeutung dieser Sätze für die Theorie der Eilinie kennen lernen.

XI. E. Studys Schwenkungsverfahren. Anwendung auf Eilinien. Gleichdicke und Zindlerkurven.

23. Definition und Grundeigenschaften des Studyschen Schwenkungsverfahrens[10]. Wir erklären die *Studysche Schwenkung der Punktepaar* (E_l, E_r) als das parataktische Abbild der räumlichen Elementenschwenkung $E \to \tilde{E}$. *Das Punktepaar* (E_l, E_r) *soll also um seinen Mittelpunkt um einen positiven rechten Winkel in die neue Lage* $(\tilde{E}_l, \tilde{E}_r)$ *geschwenkt werden.*

In Formeln ausgedrückt, erhält man durch parataktische Übertragung der Gleichungen (109) sofort zu dem Punktepaare

$$(122) \qquad E_l \begin{cases} x_l = x + q \\ y_l = y - p, \end{cases} \qquad E_r \begin{cases} x_r = x - q \\ y_r = y + p, \end{cases}$$

das im Studyschen Sinne geschwenkte Punktepaar

$$(123) \qquad \tilde{E}_l \begin{cases} \tilde{x}_l = x + p \\ \tilde{y}_l = y + q, \end{cases} \qquad \tilde{E}_r \begin{cases} \tilde{x}_r = x - p \\ \tilde{y}_r = y - q. \end{cases}$$

Ist die Punktverwandtschaft $E_l \to E_r$ parataktisches Abbild der Pfaffschen Mannigfaltigkeit

$$(124) \qquad p = p(x, y), \quad q = q(x, y),$$

und bedeutet

$$(125) \qquad \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -q(x, y), \quad \tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(x, y)$$

die daraus durch Elementenschwenkung entstehende Pfaffsche Mannigfaltigkeit, bezeichnet ferner

$$(126) \qquad \boxed{2D = q_x - p_y, \quad 2H = p_x + q_y, \quad K = \frac{\partial(p, q)}{\partial(x, y)} = p_x q_y - p_y q_x}$$

[10] E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie (Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen). Leipzig—Berlin 1911.

o folgt für die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x_l, y_l)}{\partial(x, y)} = 1 + 2D + K, \quad \frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)} = 1 - 2D + K,$$
$$\frac{\partial(\tilde{x}_l, \tilde{y}_l)}{\partial(x, y)} = 1 + 2H + K, \quad \frac{\partial(\tilde{x}_r, \tilde{y}_r)}{\partial(x, y)} = 1 - 2H + K. \tag{127}$$

Die drei Größen D, H, und K sind wichtige *isotrope Invarianten der* Pfaffschen *Mannigfaltigkeit* (124), nämlich: H ihre isotrope mittlere Krümmung, K ihre isotrope Relativkrümmung und D eine neue Invariante, deren Verschwinden die integrablen Pfaffschen Mannigfaltigkeiten kennzeichnet. Mit den Invarianten $\tilde{D}, \tilde{H}, \tilde{K}$ der geschwenkten Pfaffschen Mannigfaltigkeit (125) hängen sie durch die Formeln

$$\tilde{D} = H, \quad \tilde{H} = -D, \quad \tilde{K} = K \tag{128}$$

zusammen. Natürlich kann man auch die Punktverwandtschaft $E_l \to E_r$ selber ebenso wie die daraus durch den Studyschen Schwenkungsprozeß entstehende Verwandtschaft $\tilde{E}_l \to \tilde{E}_r$ durch diese Invarianten (gegen simultane gleichwinklige Bewegungen) kennzeichnen.

Aus den Gleichungen (127) folgt u. a. (vgl. Satz 37) der

Satz 44. *Die beiden durch das Studysche Schwenkungsverfahren miteinander verknüpften Verwandtschaften $E_l \to E_r$ und $\tilde{E}_l \to \tilde{E}_r$ sind dann und nur dann gleichzeitig eigentlich flächentreu, wenn die Invarianten D und H verschwinden, d. h., wenn diese Verwandtschaften die parataktischen Bilder zweier (konjugierter) isotroper Minimalflächen sind.*

Ebenso folgt:

Satz 45. *Eine* Pfaffsche *Mannigfaltigkeit von Flächenelementen* (124) *hat dann und nur dann eine ungleichsinnig-flächentreue Beziehung $E_l \to E_r$ als parataktisches Bild, wenn ihre isotrope Relativkrümmung $K = -1$ ist.*

Durch den Prozeß der Elementenschwenkung geht diese Eigenschaft nicht verloren; denn K ist dabei nach (128) unveränderlich. Also folgt

Satz 46. *Durch den Studyschen Schwenkungsprozeß entsteht aus einer gegensinnig-flächentreuen Punktverwandtschaft $E_l \to E_r$, und nur aus einer solchen, stets wieder eine gegensinnig-flächentreue Punktverwandtschaft $\tilde{E}_l \to \tilde{E}_r$.*

Geht man insonderheit von den Punkten E_l, E_r eines Kurvenpaares c_l, c_r aus, d. h. wählt man im isotropen Raume die Pfaffsche Mannigfaltigkeit (124) als eine Fläche ($D = 0$) der festen Relativkrümmung $K = -1$, so folgt

Satz 47. *Durch das Studysche Schwenkungsverfahren gehen die (unabhängig voneinander auf c_l und c_r gewählten) Punktepaare (E_l, E_r) zweier ebener Kurven c_l, c_r über in die Punktepaare $(\tilde{E}_l, \tilde{E}_r)$ einer gegensinnig-flächentreuen Punktverwandtschaft mit den Invarianten $\tilde{H} = 0$, $\tilde{K} = -1$.*

24. Anwendungen auf Paare ebener Kurven, insbesondere auf E linien. Da nach den Sätzen 14. und 18. ein Schmiegstreifen paralle bezogene, ein isotroper Krümmungsstreifen isometrische parataktisch Bildkurven hat, folgt aus dem Satz 39 durch parataktische Übertragun der folgende schon von E. Study angegebene

Satz 48. *Durch den Studyschen Schwenkungsprozeß erhält ma aus den Punktepaaren E_l, E_r zweier parallelbezogener ebene Kurven $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ die Punktepaare $\tilde{E}_l, \tilde{E}_r$ zweier zueinander isometr scher ebener Kurven $\tilde{\mathfrak{x}}_l, \tilde{\mathfrak{x}}_r$ und umgekehrt.*

Aus Satz 41. gewinnt man ebenfalls durch parataktische Übertragun mit Rücksicht auf die Sätze 19. und 20. bzw. 24. und 26. sofort den

Satz 49. *Den Relativscheiteln zweier parallelbezogene ebener Kurven $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ (d. h. jenen Stellenpaaren, wo das Verhältn ihrer Krümmungen $\varkappa_l : \varkappa_r$ extrem bzw. stationär ist) entsprechen durc den Studyschen Schwenkungsprozeß jene Stellenpaare auf de entstehenden isometrischen Kurven $\tilde{\mathfrak{x}}_l, \tilde{\mathfrak{x}}_r$, welche gleiche Krüm mungen ($\tilde{\varkappa}_l = \tilde{\varkappa}_r$) aufweisen, und umgekehrt.*

Um mit Hilfe dieses Satzes aus dem relativen Vierscheitelsat (Satz 19), der sich auf zwei gleichsinnig-parallel bezogene Eilinien $\mathfrak{x}_l$, bezieht, den auf zwei gleichsinnig-isometrische Eilinien $\tilde{\mathfrak{x}}_l, \tilde{\mathfrak{x}}_r$ bezügliche Vierscheitelsatz (Satz 24) zu gewinnen, haben wir nachzusehen unter welchen Bedingungen der Studysche Schwenkungsprozeß ei Eilinienpaar der ersten Art in wieder ein Eilinienpaar der zweiten Ar überführt. Nun sind nach Ziffer 9 die Bedingungen

$$0 < \varkappa < \infty, \quad |\tau| < 1 \tag{129}$$

notwendig und hinreichend für das gleichsinnig parallel bezogene Ei linienpaar $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ unter $\varkappa$ und τ die isotrope Krümmung und Windung des parataktisch zugeordneten Schmiegstreifens $\mathfrak{x}$ verstanden. Für de isotropen Krümmungsstreifen $\tilde{\mathfrak{x}}$, der daraus durch Elementenschwenkung entsteht, ist nach (120)

$$|\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta}| = |\operatorname{tang}\tilde{\omega}| = |\tau| < 1, \text{ d. h. } |\tilde{\omega}| < \frac{\pi}{4};$$

also werden nach (92) die isometrischen Bildkurven $\tilde{\mathfrak{x}}_l$ und $\tilde{\mathfrak{x}}_r$ des Krüm mungsstreifens $\tilde{\mathfrak{x}}$ ebenfalls eiförmig sein, wenn (und nur wenn)

$$|\tilde{\omega}'| = |(\operatorname{arc\,tang}\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta})'| = |(\operatorname{arc\,tang}\tau)'| = \frac{|\tau'|}{1+\tau^2} < \varkappa \tag{130}$$

ist. Es folgt

Satz 50. *Unter den Voraussetzungen* (129) *und* (130) *entsteht au dem gleichsinnig-parallel bezogenen Eilinienpaar $\mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_r$ durch de Studyschen Schwenkungsprozeß stets ein gleichsinnig-isometrisches Ei linienpaar $\tilde{\mathfrak{x}}_l, \tilde{\mathfrak{x}}_r$ und umgekehrt. Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend. Sind sie erfüllt, so kann allein durch das mit de Studyschen Schwenkung verbundene Übertragungsprinzip de*

ierscheitelsatz über Paare gleichsinnig isometrischer Ei-nien aus dem Vierscheitelsatz über Paare gleichsinnig parallel zogener Eilinien gewonnen werden und umgekehrt.

Wir wollen endlich noch das Satzpaar gewinnen, das sich durch para-ktische Übertragung aus dem Satze 43 (d. h. dem Satz von JOACHIMSTHAL r ebene Krümmungsstreifen und seinem Gegenstück für Schmieg-reifen) ergibt. Wir stützen uns dabei auf das Ergebnis der Ziffer **20** gl. die Übersicht daselbst) und finden:

Satz 51. *Kann man in einer Eilinie c die Sehne $E_l E_r$ so her-nführen, daß zwei der folgenden Eigenschaften zutreffen:*

Die durch die Sehnen $E_l E_r$ von er Eilinie abgeschnittenen Seg-ente haben konstanten Flä-heninhalt (oder: die Sehnen erühren ihren Mittenort),

. Die Sehnen $E_l E_r$ haben kon-tante Länge,

. Die Sehnen $E_l E_r$ schneiden von er Eilinie Bogen konstanter änge ab,

1. Die Sehnen $E_l E_r$ durchsetzen ihren Mittenort orthogonal,

2. Die Sehnen $E_l E_r$ haben konstante Länge,

3. Die Tangenten der Eilinie in den Endpunkten der Sehnen $E_l E_r$ sind zueinander parallel,

o trifft auch die dritte Eigenschaft zu.

Vorausgesetzt ist dabei, daß die Eilinie keinen Mittelpunkt at (in welchem Falle nämlich für die Durchmesser aus 3. *und* 1. *icht* 2. *gefolgert werden kann).*

Der rechte Teil dieses Doppelsatzes ist seit langem wohlbekannt und igentlich evident. Den linken Teil hat jedoch wohl erst E. SALKOWSKI[11]) emerkt.

Bemerkung 1. Der eben formulierte Doppelsatz gilt nach seiner Herleitung llgemeiner ebenso für irgend zwei verschiedene ebene Kurven c_l und c_r an telle der einzigen Eilinie c. In diesem allgemeineren Falle ist aber zusätzlich noch orauszusetzen, daß die beiden Kurven c_l und c_r nicht schiebungskon-ruent sind, in welchem Falle nämlich für die Schiebsehnen aus 2. und 3. icht mehr auf 1. geschlossen werden kann.

Bemerkung 2. Diese allgemeinere Fassung für Kurvenpaare hat vor allem en Vorteil, daß für sie die beiden Seiten des Satzes miteinander durch das

[11]) E. SALKOWSKI, Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises. Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss. (1934) 14. Abh. S. 57—62.

H. GERICKE, Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises. Math. Zeitschr. 0 (1936) S. 417—420.

H. AUERBACH, Sur un problème de M. ULAM concernant l'équilibre des corps lottants, Studia Math. 7 (1938) S. 121—142. (Dem Verf. nicht zugänglich.)

H. GEPPERT, Über einige Kennzeichnungen des Kreises. Math. Zeitschr. 46 (1940) . 117—128.

Übertragungsprinzip des Studyschen Schwenkungsverfahrens zusammenhäng und damit auseinander ohne weiteres gefolgert werden können. Dieser Vort geht i. a. verloren, wenn man sich, wie es bei Satz 51 geschah, auf einzeln Eilinien $c_l = c_r = c$ beschränkt.

Beispiel 1. Die einfachste Eilinie, an der eine Sehnenschar (sogar ei stetige Mannigfaltigkeit von ∞^1 solchen Scharen) fester Segmentfläche, fester Läng und festen Kurvenbogens existiert, ist der Kreis. Durch das Studysche Schwe kungsverfahren erhält man aus einer solchen Schar von Kreissehnen zwei i. verschiedene parallelbezogene konzentrische Kreise, die nur dann zusam menfallen, wenn die gewählten Sehnen Kreisdurchmesser sind.

Bemerkung 3. Dieses Zerfallen der Kurve nach Ausführung des Stud schen Schwenkungsverfahrens auf eine Sehnenschar, welche die drei Eigenschafte der linken oder rechten Serie in Satz 51 besitzt, ist eine allgemein zu erwartend Erscheinung.

Daß es überhaupt vom Kreise verschiedene Eilinien gibt, m Sehnenscharen, welche eine der beiden Dreierserien von Eigenschafte aus Satz 51 besitzen, beweist einerseits für die linke Serie das inte essante Beispiel der von K. Zindler[12]) entdeckten *Eilinien mit eine Schar Flächen- und Umfangshalbierender Sehnen fester Länge,* andre seits für die rechte Serie das altbekannte Beispiel der *Kurven feste Breite* (*Gleichdicke* der Techniker). Wir werden sehen, daß unter eine gewissen, die Eiform garantierenden Voraussetzung, diese sogenannte *Zindler-Kurven* und die *Gleichdicke* einander durch das *Studysch Schwenkungsverfahren* entsprechen und damit samt ihren wichtigste Eigenschaften auseinander in einfachster Weise gewonnen werde können. Es gilt

Satz 52. *Außer dem Kreise und den allgemeinen Gleich dicken gibt es keine weiteren Eilinien, in denen eine Sehne $E_l E$ fester Länge $2a$ so herumgeführt werden kann, daß die Tangenten i ihren Enden immer parallel sind (und folglich ihr Mittenort orthogona durchsetzt wird).*

Die beiden letztgenannten Eigenschaften bedeuten nämlich die Exi stenz einer Schar von Doppelnormalen; da deren Länge $2a$ außer dem konstant sein soll, handelt es sich in der Tat um Eilinien feste Breite (Gleichdicke).

Dementsprechend vermutet man auch, daß es außer dem *Kreis* und den *Zindlerkurven keine weiteren Eilinien* gibt, bei denen über den Sehnen einer (einzigen) festen Länge stets Flächen festen Inhalts und Bogen fester Länge ruhen; alle bisherigen Beweisversuche dafür sind aber gescheitert[13]).

[12]) K. Zindler, Monatshefte f. Math. u. Phys. **31** (1921), S. 44/45. — Eine aus führlichere Untersuchung der Zindlerkurven, insbesondere die Darstellung de allgemeinsten Kurven dieser Art verdankt man H. Auerbach[11]) und vor allen H. Geppert[11]).

[13]) Vgl. die Literaturausgaben bei H. Geppert[11]). — Auch der von H. Geppert[11]) selber geführte Beweis ist nach K. Brauner und H. R. Müller[14]) nicht stichhaltig

Man kann jedoch, wie E. Salkowski[11]), K. Brauner und H. R. Müller[14]) gezeigt haben, leicht nicht-geschlossene Linien dieser Art konstruieren. Sie hängen von einer willkürlichen Funktion und der Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung ab.

25. Gleichdicke und Zindlerkurven. Durch seine Doppelnormalen ein Gleichdick c der Dicke $E_l E_r = 2a$ so auf sich selbst bezogen, daß sich ungleichsinnig-parallele Tangenten entsprechen. Durch parataktische Abbildung entspricht daher dem Gleichdick nach Satz 43 (rechts) ein Streifen C mit den folgenden Eigenschaften:

1. C ist Fallstreifen gegen die Bildebene π,
2. C ist Böschungsstreifen gegen π der Böschung a,
3. C ist Schmiegstreifen der isotropen Torsion $|\tau| < 1$;
4. C ist zur Bildebene π symmetrisch,
5. C ist geschlossen.

Die beiden letztgenannten Eigenschaften folgen aus der Vertauschbarkeit der Endpunkte E_l, E_r der Doppelnormalen und aus der Gleichheit der Flächeninhalte der (identischen) linken und rechten Bildkurve $c_l = c_r = c$.

Bedeutet $\varrho < 2a$ den Krümmungsradius des Gleichdicks c, so ist

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho - a} \tag{31}$$

die Krümmung seiner Mittenkurve $\bar{c}$ und

$$\tau = \frac{a}{\varrho - a} \tag{32}$$

die isotrope Torsion des Schmiegstreifens C. Der Schmiegstreifen ist nämlich auch Böschungstreifen, also muß das Verhältnis

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \text{const.} = a,$$

nämlich gleich der festen Neigung a des Böschungsstreifens sein.

Durch räumliche Elementenschwenkung entspricht nun einem solchen Streifen C ein neuer Streifen $\tilde{C}$ mit folgenden fünf Eigenschaften, die sich unmittelbar aus Ziffer **22** ergeben:

1. $\tilde{C}$ ist Schichtenstreifen in der Bildebene π,
2. $\tilde{C}$ ist Böschungsstreifen bezüglich π,
3. $\tilde{C}$ ist isotroper Krümmungsstreifen,
4. $\tilde{C}$ ist zur Bildebene π symmetrisch,
5. $\tilde{C}$ ist geschlossen.

[14]) K. Brauner und H. R. Müller, Über Kurven, welche von den Endpunkten einer bewegten Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden. Math. Zeitschr. **47** (1941) S. 291—317.

Seine Krümmung $\tilde{\varkappa}$ (und die seiner Mittenkurve $\tilde{c}$ und seine isotrop Normalkrümmung $\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta}$ sind mit den Invarianten von C nach (120) dur die folgenden Gleichungen verbunden:

$$(133)\qquad \begin{cases} \tilde{\varkappa} = \varkappa = \dfrac{1}{\varrho - a}, \\ \tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta} = -\tau = -\dfrac{a}{\varrho - a} = \operatorname{tang}\tilde{\omega}. \end{cases}$$

Kehren wir durch die parataktische Abbildung wieder in die Eben zurück, so entspricht diesem isotropen *Krümmungsstreifen* $\tilde{C}$ eine sog nannte *Zindlerkurve* und zwar die allgemeinste ihrer Art. Die Streifen und $\tilde{C}$ hängen im Raume durch Elementenschwenkung, das *Gleichdick* und die *Zindlerkurve* $\tilde{c}$ also durch das *Studysche Schwenkungsverfahre* zusammen. Nach (92) ist diese Zindlerkurve dabei dann und nur dan eine Eilinie, wenn

$$|(\operatorname{arctang}\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta})'| = \frac{|(\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta})'|}{1 + (\tilde{\varkappa}\tilde{\vartheta})^2} < |\tilde{\varkappa}|,$$

d. h., wenn

$$(134)\qquad |\varrho'| < \frac{a^2 + (\varrho - a)^2}{a\,|\varrho - a|}$$

ist.

Durch parataktische Übertragung der genannten fünf Eigenschafte des isotropen Krümmungsstreifens $\tilde{C}$ erhält man die folgenden kennzeich nenden Eigenschaften der Zindlerkurven:

Satz 53. *Bei jeder Zindlerkurve $\tilde{c}$ existiert eine Schar von ∞ Sehnen $\tilde{E}_l\tilde{E}_r$, welche*

1. *von ihr konstante Flächenstücke abschneiden,*
2. *konstante Längen haben,*
3. *konstante Bogenstücke abschneiden, wobei*
4. *die Endpunkte $\tilde{E}_l$, $\tilde{E}_r$ der Sehnen vertauschbar sind, soda*
5. *die von ihnen beschriebenen Kurven $\tilde{c}_l$ und $\tilde{c}_r$ mit $\tilde{c}$ zu sammenfallen und flächengleich sind.*

Wegen 4. halbieren diese Sehnen fester Länge sowohl die Fläch als auch den Umfang der Zindlerkurve. Wir nennen sie daher kur Hauptsehnen der Zindlerkurve.

Ferner haben wir erkannt:

Satz 54. *Jedes ebene Gleichdick c liefert unter der Voraus setzung* (134) *mittels des Studyschen Schwenkungsverfahren eine Zindlerkurve $\tilde{c}$, in der man, den ∞^1 Doppelnormalen feste Länge des Gleichdicks c entsprechend, eine Sehne fester Länge s herumführen kann, daß sie beständig sowohl die Fläche als auch de Umfang der Zindlerkurve halbiert.*

Umgekehrt ergibt auch jede Zindlerkurve *durch* Studysche Schwenkung *ein Gleichdick.*

Man kann diesen einfachen Sachverhalt auch so aussprechen[15]:

Satz 55. *Bewegt sich ein festes Quadrat in der Ebene so, daß die eine Diagonale stets Doppelnormale einer Kurve fester Breite ist, so ist unter der Voraussetzung* (134) *die andere Diagonale stets umfang- und inhalthalbierende Sehne einer* Zindlerkurve *und umgekehrt.*

Wie man diesen Zusammenhang verwenden kann, um aus bekannten Eigenschaften der Gleichdicke solche der Zindlerschen Kurven zu gewinnen (oder umgekehrt) sollen noch die folgenden Beispiele beleuchten.

Beispiel 2. Ein *Gleichdick* c (mit stetig ableitbarer Krümmung) hat bekanntlich *mindestens drei Paare von Scheiteln* ($\varkappa_l = \varkappa_r = 0$), nämlich die Endpunkte jener Doppelnormalen, welche zu den (mindestens drei) Spitzen seiner Evolute gehören. — Dementsprechend hat nach Satz 49 *eine* Zindlerkurve $\tilde{c}$ *mindestens drei Hauptsehnen, in deren Endpunkten* $\tilde{E}_l, \tilde{E}_r$ *sie gleiche Krümmung* ($\tilde{\varkappa}_l = \tilde{\varkappa}_r$) *aufweist.*

Beispiel 3. Nach dem eben Erwähnten hat ein *Gleichdick* c auch mindestens *drei Doppelnormalen*, in deren Endpunkten E_l, E_r sie *absolut gleiche Krümmung* aufweist, d. h. wo $\varkappa_l + \varkappa_r = 0$ und das Gleichdick im kleinen isometrisch ist ($ds_l + ds_r = 0$). — Dementsprechend besitzt[16] eine Zindlerkurve $\tilde{c}$ nach Satz 48 *mindestens drei Doppelnormalen*, nämlich Hauptsehnen, in deren Endpunkten $\tilde{E}_l, \tilde{E}_r$ die Tangenten gegensinnig-parallel sind. Sie gehören zu den (mindestens drei) Spitzen der Mittenkurve $\overline{c}$ der Zindlerkurve.

Bemerkung 4. Aus dem Ergebnis von Beispiel 2 folgt sofort, daß jede Zindlerkurve *mindestens* $3 \cdot 2 = 6$ *Scheitel* hat[16], die i. a. allerdings sich *nicht* notwendig paarweise auf drei Hauptsehnen verteilen müssen.

XII. Räumliche Ableitung zweier Kennzeichnungen des Kreises.

26. Die isotropen Krümmungsverhältnisse der Fläche Φ. Wir haben in Nr. 20 die Punktepaare (E_l, E_r) einer Eilinie c als parataktische Bilder der Berührungselemente E einer durch c bestimmten Fläche Φ der festen Relativkrümmung $K = -1$ deuten gelernt. Diese Fläche Φ hat den ebenen Schmiegstreifen von c als *Rückkehrkante* und ist zur Ebene π von c symmetrisch. Die Fläche Φ ist endlich periodisch in z mit der Ganghöhe $h = \frac{1}{2}F(c)$, unter F die Fläche von c verstanden.

Wir wollen abschließend an zwei Kennzeichnungen des Kreises nochmals *zeigen, in welch einfacher Weise sich ebene Fragestellungen über die Eilinie c auf räumlichem (isotropem) Wege mit Hilfe der zugehörigen Fläche Φ lösen lassen.*

[15]) Vgl. H. Auerbach[11]).

[16]) Vgl. H. Geppert[11]).

Wir benötigen dazu den folgenden

Satz 55. *Es sei* $2\omega = \widehat{t_l t_r}$ *der Winkel, den die Tangenten* t_l, t_r *in den Punkten* E_l, E_r *der Eilinie* c *einschließen. Die zu* c *gehörige Fläche* Φ *der Relativkrümmung* $K = -1$ *hat dann in dem parataktisch entsprechenden Flächenelemente* E *die isotrope mittlere Krümmung*

$$H = -\operatorname{cotang} 2\omega \tag{135}$$

und die isotropen Hauptnormalkrümmungen

$$\frac{1}{R_1} = \operatorname{tang}\omega, \quad \frac{1}{R_2} = -\operatorname{cotang}\omega. \tag{136}$$

der erste Wert gilt dabei für die geschlossene, der zweite für die offene (periodische) isotrope Krümmungslinie durch E.

Der Beweis dieses einfachen Satzes fließt sofort aus der Formel (70).

27. Eine erste Kennzeichnung des Kreises. Wir beweisen durch räumliche isotrope Mittel unter Heranziehung der Fläche Φ zuerst den folgenden

Satz 56. *Kann man in einer Eilinie* c *eine Sehne fester Länge* $\overline{E_l E_r} = l$ *so herumführen, daß sie stets gleiche Bogen (und daher auch gleiche Flächenstücke) abschneidet, und ist außerdem noch der Schnittwinkel* 2ω *ihrer Tangenten in den Sehnenenden konstant: so ist die Eilinie notwendig ein Kreis.*

Beweis. Nach Nr. **20** ist der Streifen, welcher den Lagen der Sehne $E_l E_r$ auf der durch c bestimmten Fläche Φ entspricht, zugleich 1. ein (geschlossener) isotroper Krümmungsstreifen, 2. Böschungsstreifen und 3. Schichtenstreifen bezüglich der Ebene π von c. Die Streifenkurve (Schichtenlinie auf Φ) heiße k. Nach (136) hat wegen des festen Tangentenwinkels die isotrope Normalkrümmung des Krümmungsstreifens den konstanten Wert

$$\frac{1}{R_1} = \operatorname{tang}\omega = \text{const.}$$

Da der Streifen gegen die Ebene π feste Böschung ϑ hat, wird [nach dem isotropen Meusnierschen Satze, d. h. nach (38)] auch die isotrope Krümmung $\varkappa$ der Schichtenlinie k konstant sein, und da für Schichtenlinien die isotrope Krümmung mit der gewöhnlichen Krümmung zusammenfällt, ist zunächst k ein Kreis.

Dann ist aber der längs k der Fläche Φ umschriebene Böschungsstreifen ein kreisförmiger Streifen auf einem Drehkegel, und da Φ auch durch diesen drehsymmetrischen Streifen eindeutig bestimmt ist, ist Φ selber eine Drehfläche.

Dann ist aber auch die Eilinie c als Rückkehrkante der Drehfläche Φ drehsymmetrisch, d. h. c ist in der Tat ein Kreis.

28. Eine zweite Kennzeichnung des Kreises. Wir beweisen zum hlusse auf ähnliche räumlich-isotrope Art mittels der Fläche Φ den lgenden

Satz 57. *Es variiere die Länge l stetig im Intervalle $0 \leqq l \leqq L$. t dann c eine Eilinie, bei der über den Sehnen $E_l E_r$ der beliebig, per fest aus dem Intervalle $0 \leqq l \leqq L$ entnommenen Länge l stets ogen fester Länge s $(0 \leqq s \leqq S)$ ruhen [und damit auch Seg- ente fester Fläche f $(0 \leqq f \leqq F)$], so ist die Eilinie c notwendig n Kreis.*[17])

Beweis. Nach Annahme gibt es dann nämlich nach Nr. **20** auf der urch c bestimmten Fläche Φ eine stetige Schar von Schichtenlinien horizontalen (zu π parallelen) Ebenen, welche isotrope Krümmungs- nien sind. Folglich sind auch die Fallinien von Φ isotrope Krüm- ungslinien.

Das isotrope *sphärische Bild* des Systems der Krümmungslinien der läche Φ besteht also (nach dem Satze von Joachimsthal) aus einem *Sy- em konzentrischer Kreise (Bild der Schichtenlinien) mit ihren Durch- essern (Bild der Fallinien).* Die Fallinien von Φ sind also zylindri- he Kurven; die längs ihnen der Fläche Φ umschriebenen Krümmungs- reifen liegen dabei *auf Zylindern horizontaler Erzeugendenrichtung.* ie Verbindungssehnen $E_l E_r$ der parataktischen Bildpaare einer den Fallinie sind daher zueinander parallel; umgekehrt liefern arallele Sehnen der Eilinie c die parataktischen Bildpaare E_l, E_r der lächenelemente E einer Fallinie von Φ. Weil diese Fallinien zugleich otrope Krümmungslinien sind, schneiden *parallele Sehnen* aus der ilinie c stets *gleiche Bogenstücke* aus (und umgekehrt).

Die Eilinie c hat also notwendig die Eigenschaft, daß parallele ehnen (des genannten Intervalls) aus ihr gleiche Bogenstücke aus- chneiden, und daß umgekehrt zu gleichen Bogenstücken parallele ehnen gehören.

Dann gilt aber für die Eilinie c der Pascalsche Satz, wie man rkennt, wenn man durch ein beliebig angenommenes Bogenstück 1 zwei erschiedene Parallelenpaare legt: die beiden von ihnen ausgeschnittenen ogen 2 und 3 sind dann nämlich gleich, liegen also ebenfalls auf einem ritten parallelen Sehnenpaar.

Die Eilinie c ist also ein Kegelschnitt (Ellipse), und weil irgend- wei parallele Sehnen stets gleiche Bogen ausschneiden sollen, ist sie notwendig ein Kreis. W. z. b. w.

[17]) K. Yanagihara, On some properties of simply closed convex curves and urfaces. Science Rep. Tohôku Imper. Univ. 4 (1915), S. 65—77.

J. Hirakawa, On a characteristic property of the circle. Tohôku Math. Journ. 37 1933) S. 175—178.

K. Brauner—H. R. Müller[14]), insbes. S. 295 und S. 311.

(Eingegangen am 19. Juli 1945.)

Zur Theorie der Tschebyscheffschen Polynome.

Von

P. Heuser in Darmstadt *).

Es sei $\mathfrak{U}_x$ eine einfach zusammenhängende Umgebung des Punktes ∞ in der x-Ebene mit mindestens zwei Randpunkten. Die Funktion

$$x = \psi(t) = t + a_0 + \frac{a_1}{t} + \cdots \tag{1}$$

bilde das Kreisäußere $|t| > r_0$ konform auf $\mathfrak{U}_x$ ab. Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ und r_0 sind dadurch eindeutig festgelegt. Es kann durch eine Parallelverschiebung $x - a_0 = x'$ immer erreicht und daher von vornherein angenommen werden, daß $a_0 = 0$ ist. Es sei $r_0 < r < \infty$; das durch die Abbildung (1) in der x-Ebene hergestellte Bild des Kreises $|t| = r$ bezeichnen wir mit C_r.

Zu jeder Kurve C_r und zu jedem n gehört ein Tschebyscheffsches Polynom $t_n(r; x)$, das durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

a) $t_n(r; x)$ ist in x vom Grade n,

b) der Koeffizient von x^n ist 1,

c) alle von $t_n(r; x)$ verschiedenen Polynome, welche auch die Eigenschaften a) und b) haben, besitzen auf C_r ein Maximum des absoluten Betrages, das größer ist als das Maximum von $|t_n(r; x)|$ auf C_r.

Neben diesem Tschebyscheffschen Polynom $t_n(r; x)$ betrachten wir das Fabersche Polynom $n$ten Grades $p_n(x)$ [1]), das durch

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x$$

und im übrigen dadurch eindeutig definiert werden kann, daß es als Funktion von t eine Darstellung besitzt

$$p_n(x) = p_n(\psi(t)) = t^n + \frac{1}{t}\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right), \tag{2}$$

*) Eine erste Niederschrift der vorliegenden Arbeit übergab ich vor meiner Wiedereinberufung zur Wehrmacht meinem Freunde Prof. Max Müller in Tübingen zur Durchsicht. Ich danke Herrn Müller wärmstens dafür, daß er nicht nur meine Ausführungen nachprüfte, sondern auch die endgültige Abfassung der Arbeit übernahm, als ich selbst durch Einsatz an der Ostfront daran verhindert war.

[1]) G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome. Journ. f. die reine und angew. Mathematik **150** (1920), S. 79—106.

o $\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)$ eine mindestens für $|t| > r_0$ konvergente Potenzreihe in $\frac{1}{t}$ edeutet[2]). Ersetzt man $\mathfrak{U}_x$ durch das Äußere der Kurve C_r, so erhält an wieder die Abbildungsfunktion $\psi(t)$ und wird auf dasselbe Fabersche olynom $p_n(x)$ geführt. Zu allen Kreisbildern C_r desselben Außenebietes $\mathfrak{U}_x$ gehört also dasselbe Fabersche Polynom $n$ter Ordnung.

Während Herr Faber im Hinblick auf die Behandlung von Reihen er Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t_n(r; x)$$

auptsächlich die Beziehung zwischen den $t_n(r; x)$ und den $p_n(x)$ bei estem r und wachsendem n betrachtet[3]), wird im folgenden der Zuammenhang zwischen diesen Polynomen bei festem n und unbegrenzt achsendem r untersucht. Es wird gezeigt, daß $t_n(r; x)$ stetig von r bhängt und bei unbegrenzt wachsendem r in jedem beschränkten eil der x-Ebene gleichmäßig gegen $p_n(x)$ konvergiert.

Wenn also für alle Kreisbilder C_r in einem Bereich $\mathfrak{U}_x$ die Tschebyscheffschen Polynome dieselben, d. h. unabhängig von r sind, sind ie mit den Faberschen Polynomen identisch.

§ 1.

Die $t_n(r; x)$ hängen stetig von r ab.

Daß $t_n(r; x)$ eine stetige Funktion von r ist, ergibt sich unmittelar aus folgendem Satz:

Ist $\{r_m\}$ eine konvergente Folge von Zahlen, die größer als r_0 sind,
nd auch

3) $$\lim_{m \to \infty} r_m = r_* > r_0,$$

o ist

4) $$\lim_{m \to \infty} t_n(r_m; x) = t_n(r_*; x).$$

Beweis: Nach der Eigenschaft c) der Tschebyscheffschen Polyome ist

$$\operatorname*{Max}_{C_r} |t_n(r; x)| \leqq \operatorname*{Max}_{C_r} |p_n(x)|.$$

Wenn aber x auf C_r liegt, ist $|t| = r$ und daher nach (2)

$$|p_n(x)| \leqq r^n + \frac{1}{r} \operatorname*{Max}_{C_r} \left|\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqq r^n + \frac{1}{r} M_n(r),$$

[2]) Vgl. G. Faber, a. a. O., S. 83, Gl. (13), wo nur gemäß unseren Festlegungen durch $\frac{1}{t}$ zu ersetzen ist.

[3]) A. a. O., § 5.

wo $M_n(r)$ eine nicht steigende Funktion von r ist. Es ist also auch

$$\text{Max}\,|t_n(r;x)| \leqq r^n + \frac{1}{r} M_n(r) \qquad (r_0 < r < \infty) \tag{5}$$

Nunmehr sei r eine untere, r eine obere Schranke der Zahlen r_{m_λ}. Da $r_* > r_0$ vorausgesetzt ist, kann $r > r_0$ angenommen werden. Dann ist nach (5) im abgeschlossenen Innern $I(C_r)$ der Kurve C_r

$$|t_n(r_m;x)| \leqq r^n + \frac{1}{r} M_n(r) \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Die Polynome $t_n(r_m;x)$ sind also in $I(C_r)$ gleichmäßig beschränkt. Daher kann man eine Indexteilfolge $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda, \ldots$ derart finden, daß die Polynome $t_n(r_{m_\lambda};x)$ für $\lambda \to \infty$ gegen ein Polynom $T_n(x)$ vom $n$ten Grade konvergieren, in welchem x^n den Koeffizienten 1 hat. Wir wollen zeigen, daß, wie auch sonst die Teilfolge $m_1, m_2, \ldots$ gewählt wurde,

$$T_n(x) = t_n(r_*;x)$$

ist.

Wäre dies nicht der Fall, so müßte nach c)

$$\underset{C_{r_*}}{\text{Max}}\,|T_n(x)| > \underset{C_{r_*}}{\text{Max}}\,|t_n(r_*;x)|$$

sein, also, wenn

$$\underset{C_{r_*}}{\text{Max}}\,|t_n(r_*;x)| = \mu > 0$$

gesetzt wird,

$$\underset{C_{r_*}}{\text{Max}}\,|T_n(x)| = \mu + 2\varepsilon,$$

wo ε eine positive Zahl ist. Ist x_* ein Punkt von C_{r_*}, wo

$$|T_n(x^*)| = \underset{C_{r_*}}{\text{Max}}\,|T_n(x)| = \mu + 2\varepsilon,$$

und $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ eine Folge von Punkten die gegen x_* konvergiert und bei der x_k auf C_{r_k} liegt[4]), so ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} |t_n(r_{m_\lambda};x_\lambda)| = |T_n(x_*)| = \mu + 2\varepsilon,$$

also von einem gewissen Index $\lambda = \lambda_0$, ab

$$|t_n(r_{m_\lambda};x_\gamma)| > \mu + \varepsilon$$

und erst recht

$$\underset{C_{r_{m_\lambda}}}{\text{Max}}\,|t_n(r_{m_\lambda};x)| > \mu + \varepsilon. \tag{7}$$

Da

$$\underset{C_{r_*}}{\text{Max}}\,|t_n(r_*;x)| = \mu$$

und $t_n(r_*;x)$ durchweg stetig ist, ferner von einer gewissen Nummer

[4]) Eine solche Punktfolge gibt es, weil zu jedem $\delta > 0$ für hinreichend große m die Kurve C_{r_m} ganz in der δ-Umgebung der Kurve C_{r_*} verläuft.

$= \lambda_1$ ab die Kurve C_{r_m} in einer beliebig kleinen Umgebung von r_* verläuft, ist für $\lambda \geqq \lambda_1$

$$\max_{C_{r_{m_\lambda}}} |t_n(r_*; x)| > \mu + \varepsilon.$$

für $\lambda \geqq \max(\lambda_0, \lambda_1)$ wäre nach (7) und (8)

$$\max_{C_{r_{m_\lambda}}} |t_n(r_*; x)| < \max_{C_{r_{m_\lambda}}} |t_n(r_{m_\lambda}; x)|,$$

was der Eigenschaft c) der Tschebyscheffschen Polynome widerspricht.

Damit ist zunächst bewiesen, daß für jede gegen r_* strebende Folge von Radien $r_{m_1}, r_{m_2}, \ldots, r_{m_\lambda}, \ldots$, für welche überhaupt $\lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{m_\lambda}; x)$ existiert, dieses Grenzpolynom gleich $t_n(r_*; x)$ ist. Nehmen wir nun an, daß die vollständige Folge $\{t_n(r_m; x)\}$ nicht konvergiert. Dann gibt es mindestens eine Stelle ξ, wo die Folge $\{t_n(r_m; \xi)\}$ zwei verschiedene Häufungswerte h' und h'' hat. Wir können eine Teilfolge $m_1', m_1', \ldots$ und eine Teilfolge $m_1'', m_2'', \ldots$ derart finden, daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{m_\lambda'}; \xi) = h', \quad \lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{m_\lambda''}; \xi) = h''. \tag{9}$$

Aus der Folge $m_1', m_2', \ldots$ kann man wiederum eine Teilfolge $\bar{m}_1', \bar{m}_2', \ldots$ herausheben, so daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{\bar{m}_\lambda'}; x) = \bar{T}_n(x)$$

existiert, und aus der Folge $m_1'', m_2'', \ldots$ kann man eine Teilfolge $\bar{m}_1'', \bar{m}_2'', \ldots$ aussondern, so daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_n(r_{\bar{m}_\lambda''}; x) = \bar{\bar{T}}_n(x)$$

existiert. Nach (9) wäre

$$\bar{T}_n(\xi) = h' \neq h'' = \bar{\bar{T}}_n(\xi).$$

Dies widerspricht aber der im vorigen Abschnitt des Beweises gewonnenen Feststellung, daß

$$\bar{T}_n(x) = t_n(r_*; x), \quad \bar{\bar{T}}_n(x) = t_n(r_*; x)$$

sein muß.

Damit ist nun bewiesen, daß $\lim_{m \to \infty} t_n(r_m; x)$ existiert und überdies die Beziehung (4) gilt.

§ 2.

$t_n(r; x) \to p_n(x)$ für $r \to \infty$.

Wir wollen nun zeigen, daß auch $\lim_{r \to \infty} t_n(r; x)$ *existiert und daß diese Grenzfunktion mit* $p_n(x)$ *identisch ist. In jedem abgeschlossenen endlichen Teil der* x*-Ebene ist dieser Grenzübergang gleichmäßig in* x.

Zum Beweise entwickeln wir $t_n(r;x)$ nach den Polynomen $p_\nu(x)$ und erhalten[5])

$$(10)\qquad t_n(r;x) = p_n(x)+b_1(r)\,p_{n-1}(x)+\cdots+b_{n-1}(r)\,p_1(x)+b_n(r).$$

Nach (2) ist also, wenn $t = r\tau$ gesetzt wird, auf dem Kreise $|\tau| =$

$$\begin{aligned} t_n(r;x) &= t_n(r;\psi(r\tau)) \\ &= p_n(\psi(r\tau))+b_1(r)\,r^{n-1}\tau^{n-1}+\cdots+b_{n-1}(r)\,r\tau+b_n(r)+ \\ &+\frac{1}{r\tau}\left\{b_1(r)\,\mathfrak{P}_{n-1}\left(\frac{1}{r\tau}\right)+\cdots+b_{n-1}(r)\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{r\tau}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$(11)\qquad B(r) = \mathrm{Max}\,\{|b_1(r)|\,r^{n-1},\ |b_2(r)|\,r^{n-2},\ \ldots,\ |b_{n-1}(r)|\,r,\ |b_n(r)|\}.$$

Ist $B(r) = 0$ für alle hinreichend großen r, etwa für $r > \tilde{r}$, so ist nach (10) $t_n(r;x) \equiv p_n(x)$ für $r > \tilde{r}$ und unsere Behauptung trivial. Andernfalls gibt es beliebig große r, für die $B(r) > 0$ ist. Für dieses r kann

$$(12)\qquad t_n(r;x) = p_n(x)+B(r)\left\{Q_{n-1}(r;\tau)+\xi\left(r;\frac{1}{\tau}\right)\right\}$$

geschrieben werden, wobei

$$(13)\qquad Q_{n-1}(r;\tau) = \frac{b_1(r)\,r^{n-1}}{B(r)}\,\tau^{n-1}+\cdots+\frac{b_n(r)}{B(r)}.$$

also nach (11)

$$(14)\qquad |Q_{n-1}(r;\tau)| \leqq n \qquad \text{für } |\tau| = 1.$$

und

$$(15)\qquad \xi\left(r;\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{r\tau}\left\{\frac{b_1(r)}{B(r)}\,\mathfrak{P}_{n-1}\left(\frac{1}{r\tau}\right)+\cdots+\frac{b_{n-1}(r)}{B(r)}\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{r\tau}\right)\right\}.$$

also für $|\tau| = 1$

$$(16)\qquad \left|\xi\left(r;\frac{1}{\tau}\right)\right| \leqq \frac{1}{r}\,\{M_{n-1}(r)+\cdots+M_1(r)\};$$

mit unbeschränkt wachsendem r strebt also $\xi\left(r;\frac{1}{\tau}\right)$ auf dem Kreis $|\tau| = 1$ gleichmäßig gegen Null.

Es sei nun $\{r_m\}$ eine Folge oberhalb r_0 gelegener und gegen ∞ strebender Zahlen, für welche $B(r) > 0$ ist. Da die Polynome $Q_{n-1}(r_m;\tau)$ nach (14) auf $|\tau| = 1$ gleichmäßig beschränkt sind, kann man eine Indexteilfolge $m_1, m_2, \ldots$ derart finden, daß an n verschiedenen Punkten $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ des Einheitskreises die Folgen $Q_{n-1}(r_{m_\lambda};\tau_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ konvergieren. Dann existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{b_1(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})} = C_1, \ldots, \lim_{\lambda\to\infty}\frac{b_n(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})} = C_n.$$

Daraus folgt nach (13) die Existenz von

$$\lim_{\lambda\to\infty} Q_{n-1}(r_{m_\lambda};\tau) = C_1\tau^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\tau+C_n = Q_{n-1}(\tau).$$

[5]) G. Faber, a. a. O., S. 87, Gl. (38).

ach (11) ist

$$\left| \frac{b_1(r_{m_\lambda}) r_{m_\lambda}^{n-1}}{B(r_{m_\lambda})} \right| + \cdots + \left| \frac{b_n(r_{m_\lambda})}{B(r_{m_\lambda})} \right| \geqq 1.$$

lso auch, wie der Grenzübergang $\lambda \to \infty$ lehrt,

$$|C_1| + \cdots + |C_n| \geqq 1.$$

ithin ist das Polynom $Q_{n-1}(\tau)$ zwar höchstens vom Grade $n-1$. ber nicht identisch gleich Null.

Indem wir zur Abkürzung $r_{m_\lambda} = \varrho_\lambda$ setzen, können wir feststellen, aß es eine Folge oberhalb r_0 gelegener und gegen ∞ strebender ahlen $\{\varrho_\lambda\}$ derart gibt, daß gleichmäßig auf dem Einheitskreis

(17) $$Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau) - \xi\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau}\right) \to Q_{n-1}(\tau) \quad \text{für } \lambda \to \infty,$$

vo das Polynom $Q_{n-1}(\tau)$ höchstens vom Grade $n-1$ ist, aber nicht dentisch verschwindet.

Nach dem Hilfssatz, den wir in § 3 formulieren und beweisen angewandt mit $\alpha = 0$ und $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$) gibt es, welchen der unendlich vielen möglichen, zueinander mod 2π kongruenten Werte wir auch unter $\arg Q_{n-1}(\tau)$ bzw. unter $\arg \tau_0^n$ verstehen, eine ganze Zahl k und auf dem Kreis $|\tau| = 1$ einen Punkt τ_0, wo $Q_{n-1}(\tau_0) \neq 0$ und

(18) $$2k\pi - \frac{\pi}{6} \leqq \arg Q_{n-1}(\tau_0) - \arg \tau_0^n \leqq 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

st. Ferner ist gleichmäßig für alle Punkte des Einheitskreises

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\varrho_\lambda \tau} \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{\varrho_\lambda \tau}\right) = 0,$$

während $\varrho_\lambda \tau_0^n$ für $\lambda \to \infty$ auf einem festen Strahl der Zahlenebene gegen ∞ strebt. Daher ist nach (2)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \arg \{p_n(\psi(\varrho_\lambda \tau_0))\} = \lim_{\lambda \to \infty} \arg \left\{\varrho_\lambda^n \tau_0^n + \frac{1}{\varrho_\lambda \tau_0} \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{\varrho_\lambda \tau_0}\right)\right\}$$
$$= \lim_{\lambda \to \infty} \arg \varrho_\lambda^n \tau_0^n = \arg \tau_0^n.$$

Schließlich ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left\{Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau_0) + \xi\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau_0}\right)\right\} = Q_{n-1}(\tau_0) \neq 0,$$

also

$$\lim_{\lambda \to \infty} \arg \left\{Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau_0) + \xi\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau_0}\right)\right\} = \arg Q_{n-1}(\tau_0).$$

Wir können also λ_0 so groß wählen, daß für $\lambda \geqq \lambda_0$

(19) $$|\arg \{p_n(\psi(\varrho_\lambda \tau_0))\} - \arg \tau_0^n| < \frac{\pi}{12}$$

und

(20) $$\arg \left\{B(\varrho_\lambda)\left[Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau_0) + \xi\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau_0}\right)\right]\right\} - \arg Q_{n-1}(\tau_0)$$
$$= \arg \left[Q_{n-1}(\varrho_\lambda; \tau_0) + \xi\left(\varrho_\lambda; \frac{1}{\tau_0}\right)\right] - \arg Q_{n-1}(\tau_0) < \frac{\pi}{12}$$

ist. Dann wird nach (18), (19) und (20)

$$\arg p_n(\psi(\varrho_\lambda \tau_0)) - \arg\left\{B(\varrho_\lambda)\left|Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0)+\zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right|\right\} \tag{21}$$
$$\leqq 2k\pi+\frac{\pi}{6}+2\frac{\pi}{12} = 2k\pi+\frac{\pi}{3}.$$

Wir können uns nach (17) λ_0 auch noch gleich so groß gewählt denken, daß für $\lambda \geqq \lambda_0$

$$\left|Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0)+\zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right| \geqq \frac{1}{2}|Q_{n-1}(\tau_0)| = 2\beta \tag{22}$$

wird, wo also β eine positive Zahl bedeutet.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\psi(\varrho_\lambda \tau_0) = x_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

und außerdem für den Augenblick

$$B(\varrho_\lambda)\left|Q_{n-1}(\varrho_\lambda;\tau_0)+\zeta\left(\varrho_\lambda;\frac{1}{\tau_0}\right)\right| = q, \tag{23}$$

so besagt (12), daß

$$t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda) = p_n(x_\lambda)+q. \tag{24}$$

Es sei zunächst $p_n(x_\lambda) \neq 0$. Deuten wir die in (24) auftretenden Größen als Vektoren und damit als Seiten eines Dreiecks, so erkennen wir, daß der Vektor $t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)$ mindestens so lang ist wie die Strecke, die sich aus der Strecke $|p_n(x_\lambda)|$ und der senkrechten Projektion des Vektors q auf die den Vektor $p_n(x_\lambda)$ tragende Gerade zusammensetzt, d. h. daß

$$|t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)| \geqq |p_n(x_\lambda)|+|q|\cos(p_n(x_\lambda), q).$$

Da aber

$$\sphericalangle(p_n(x_\lambda), q) = \arg p_n(x_\lambda) - \arg q$$

nach (23) und (21) zwischen $2h\pi-\frac{\pi}{3}$ und $2h\pi+\frac{\pi}{3}$ liegt, ist sein Cosinus dem Betrage nach mindestens gleich $\frac{1}{2}$ und daher

$$|t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)| \geqq |p_n(x_\lambda)| + \tfrac{1}{2}|q|.$$

Diese Ungleichung gilt nun aber auch dann, wenn $p_n(x_\lambda) = 0$ ist, also ausnahmslos. Nach (23) und (22) ist also schließlich

$$|t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)| \geqq |p_n(x_\lambda)| + B(\varrho_\lambda)\beta. \tag{24}$$

Nach (2) ist für $|t| \geqq r_0'$, wenn r_0' irgendwie oberhalb r_0 gewählt wird,

$$\left||p_n(\psi(t))| - |t^n|\right| \leqq \frac{1}{|t|}\left|\mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leqq \frac{M_n(r_0')}{|t|} = \frac{M}{|t|}. \tag{25}$$

Denken wir uns λ_0 auch noch so groß gewählt, daß für $\lambda \geqq \lambda_0$ die Ungleichung $\varrho_\lambda \geqq r_0'$ gilt, so ist insbesondere für $t = \varrho_\lambda \tau_0$

$$\varrho_\lambda^n - \frac{M}{\varrho_\lambda} \leqq |p_n(x_\lambda)| < \varrho_\lambda^n + \frac{M}{\varrho_\lambda}. \tag{26}$$

us (24) und (26) folgt, daß

$$7) \qquad \operatorname*{Max}_{C_{\varrho_\lambda}} |t_n(\varrho_\lambda; x)| \geqq |t_n(\varrho_\lambda; x_\lambda)| \geqq \varrho_\lambda^n - \frac{M}{\varrho_\lambda} + B(\varrho_\lambda)\beta.$$

Nach der Eigenschaft c) der Tschebyscheffschen Polynome und ch (25) ist aber andererseits

$$8) \qquad \operatorname*{Max}_{C_{\varrho_\lambda}} |t_n(\varrho_\lambda; x)| \leqq \operatorname*{Max}_{C_{\varrho_\lambda}} |p_n(x)| \leqq \varrho_\lambda^n + \frac{M}{\varrho_\lambda}.$$

us (27) und (28) ergibt sich, daß

$$9) \qquad B(\varrho_\lambda) \leqq \frac{2M}{\beta} \cdot \frac{1}{\varrho_\lambda} \quad \text{für } \lambda \geqq \lambda_0.$$

s ist also

$$0) \qquad \lim_{\lambda \to \infty} B(\varrho_\lambda) = 0.$$

Wir behaupten, daß sogar

$$1) \qquad \lim_{r \to \infty} B(r) = 0$$

t. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine Folge $\{r_m\}$ on oberhalb r_0 gelegenen und gegen ∞ strebenden Zahlen, für elche

$$2) \qquad B(r_m) \geqq S > 0$$

liebe. Aus dieser ließe sich aber nach dem soeben durchgeführten erfahren eine Teilfolge $\{r_{m_\lambda}\}$ oder $\{\varrho_\lambda\}$ derart aussondern, daß $(\varrho_\lambda) \to 0$ für $\lambda \to \infty$, im Widerspruch zu (32).

Nach (31) und (11) ist auch

$$\lim_{r \to \infty} |b_\nu(r)| r^{n-\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

lso erst recht

$$\lim_{r \to \infty} |b_\nu(r)| = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

aher nach (10)

$$3) \qquad t_n(r; x) - p_n(x) \to 0 \quad \text{für } r \to \infty.$$

n jedem abgeschlossenen endlichen Teil der x-Ebene ist dieser Grenzbergang gleichmäßig in x.

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Für die Teilfolgen $\{\varrho_\lambda\}$, ie wir oben benutzten, läßt sich über den Grenzübergang (33) Geaueres sagen: Es ist nach (11) und (29)

$$|b_\nu(\varrho_\lambda)| < \frac{2M}{\beta} \frac{1}{\varrho_\lambda^{n-\nu+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

nd daher nach (10) und (25)

$$|t_n(\varrho_\lambda; x) - p_n(x)| \leqq \frac{2M^2}{\beta}\left[\frac{1}{\varrho_\lambda^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\varrho_\lambda^2}\right] + \frac{2nM}{\beta}\frac{1}{\varrho_\lambda} \leqq \frac{K}{\varrho_\lambda}$$

ür $\lambda > \lambda_0$, sobald nur die Konstante $K = K(r_0')$ hinreichend groß ewählt und x in $I(C_{\varrho_\lambda})$ gehalten wird.

§ 3.

Ein Hilfssatz über Polynome.

Es ist noch der oben benutzte Hilfssatz anzuführen und zu beweisen:

Bedeutet $Q(x)$ ein beliebiges, nicht identisch verschwindendes Polynom von höchstens $(n-1)$ tem Grade $(n \geqq 1)$ und α eine beliebige Zahl, so gibt es zu jedem noch so kleinen positiven ε auf dem Kreis $|x| = 1$ mindestens einen Punkt x_0, für den $Q(x_0) \neq 0$ und, welches der unendlich vielen möglichen zueinander mod 2π *kongruenten Werte wir auch unter* arg $Q(x_0)$ *bzw.* arg x_0^n *verstehen,*

$$\alpha_0 - \varepsilon \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n \leqq \alpha_0 + \varepsilon$$

ist, wo α_0 eine geeignet gewählte, zu α mod 2π *kongruente Zahl bedeutet.*

Beweis. Falls $Q(x)$ identisch gleich einer Konstanten c ist, kann man sofort ein x_0 angeben, für das sogar

$$\arg c - \arg x_0^n = \alpha$$

ist, nämlich $x_0 = e^{i\omega}$ mit $\omega = \frac{1}{n}(\arg c - \alpha)$.

In allen anderen Fällen zerlegen wir $Q(x)$ in Linearfaktoren:

$$Q(x) = A(x-x_1) \ldots (x-x_k) \quad (1 \leqq k \leqq n-1).$$

Wir nehmen zunächst an, daß keine der Nullstellen x_k auf dem Kreis $|x| = 1$ liegt.

Wir entscheiden uns für einen der möglichen Werte von arg A, die alle mod 2π kongruent sind. Wir können ferner φ_* so wählen, daß $e^{i\varphi_*}$ von jeder der Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ verschieden ist, im vorliegenden Fall also z. B. $\varphi_* = 0$ setzen, und jedem der Ausdrücke arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ irgendeinen der möglichen Werte beilegen. An den übrigen Stellen $x = e^{i\varphi}$ können und wollen wir aber dann arg $(x - x_\varkappa)$ = arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ so bestimmen, daß folgendes gilt: Ist $|x_\varkappa| > 1$ und durchläuft φ das Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$, so ändert sich arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ stetig, beginnend mit dem gewählten Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$, und kehrt für $\varphi \to \varphi_* + 2\pi$ zum Ausgangswert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ zurück; die Gesamtänderung von arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ ist also in diesem Falle gleich Null. Ist $|x_\varkappa| < 1$ und durchläuft φ das Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$, so wächst arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ stetig vom gewählten Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa)$ an bis zum Wert arg $(e^{i\varphi_*} - x_\varkappa) + 2\pi$; in diesem Falle erfährt also arg $(e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ eine Vermehrung um 2π.

Setzen wir nun

$$\arg Q(e^{i\varphi}) = \arg A + \arg(e^{i\varphi} - x_1) + \cdots + \arg(e^{i\varphi} - x_k), \tag{34}$$

so ist also die Änderung von arg $Q(e^{i\varphi})$, wenn φ das Interval

$\leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ durchläuft, eine Vergrößerung um höchstens $2k\pi$, so um höchstens $2(n-1)\pi$. Tragen wir

$$y = \arg Q(e^{i\varphi}) = f(\varphi)$$

einem rechtwinkligen (φ, y)-Koordinatensystem auf, so erhalten wir ne stetige Kurve mit der Anfangskoordinate $\Phi_0 = f(\varphi_*)$ und einer ndkoordinate

$$\Phi_1 = f(\varphi_* + 2\pi) \leqq \Phi_0 + 2(n-1)\pi.$$

Zwischen $\Phi_1 - 2n\pi \leqq \Phi_0 - 2\pi$ (einschließlich) und Φ_0 (ausschließ-h) liegt mindestens eine zu $\alpha \bmod 2\pi$ kongruente Zahl $\alpha_0' = \alpha + 2h'\pi$. Wir betrachten die Gerade

$$y = \alpha_0' + n(\varphi - \varphi_*) = g(\varphi).$$

a

$g(\varphi_*) = \alpha_0' < \Phi_0 = f(\varphi_*)$; $g(\varphi_* + 2\pi) = \alpha_0' + 2n\pi \geqq \Phi_1 = f(\varphi^* + 2\pi)$

t, gibt es im Intervall $\varphi_* < \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ mindestens eine Stelle φ_0. o $f(\varphi_0) = g(\varphi_0)$, d. h.

35) $$\arg Q(e^{i\varphi_0}) = \alpha_0' + n(\varphi_0 - \varphi_*) = \alpha_0' + \arg (e^{i\varphi_0})^n - n\varphi_*,$$

enn $\arg (e^{i\varphi_0})^n$ geeignet gewählt wird. Setzen wir $e^{i\varphi_0} = x_0$ und sbesondere $\varphi_* = 0$, so ist also $Q(x_0) \neq 0$ und bei der in (34) und 35) getroffenen Bestimmung der auftretenden Argumente

$$\arg Q(x_0) - \arg x_0^n = \alpha_0' = \alpha + 2h'\pi.$$

ehmen wir die Bestimmung der Argumente irgendwie anders vor, ändert sich die linke Seite nur um ein ganzzahliges Vielfaches on 2π, und es wird bei geeigneter Wahl der ganzen Zahl h

$$\arg Q(x_0) - \arg x_0^n = \alpha + 2h\pi = \alpha_0.$$

n diesem Fall ist also unsere Behauptung sogar mit $\varepsilon = 0$ richtig.

Nun ist noch der Fall zu betrachten, daß einige Nullstellen von (x) den Betrag 1 haben; es seien dies die Nullstellen $x_1, \ldots, x_l$, o $1 \leqq l \leqq k \leqq n-1$. Dann können wir φ_* ebenfalls so wählen, aß $e^{i\varphi_*}$ mit keiner Nullstelle von $Q(x)$ zusammenfällt, es aber außer-em so einrichten, daß $|\varphi_*| < \frac{\varepsilon}{2n}$ ist. Das Argument von A und die rgumente $\arg (e^{i\varphi} - x_\varkappa)$ bestimmen wir, falls $|x_\varkappa| \gtrless 1$ ist, wie vorhin. ie Nullstellen $x_\lambda = e^{i\varphi_\lambda}$ können wir uns so numeriert und die φ_λ o gewählt denken, daß

$$\varphi_* < \varphi_1 \leqq \varphi_2 \leqq \cdots \leqq \varphi_l < \varphi_* + 2\pi.$$

edem der Ausdrücke $\arg (e^{i\varphi_\varkappa} - e^{i\varphi_\lambda})$ legen wir irgendeinen seiner öglichen Werte bei und setzen $\arg (e^{i(\varphi_\varkappa + 2\pi)} - e^{i\varphi_\lambda}) = \arg (e^{i\varphi_*} - e^{i\varphi_\lambda})$ $- 2\pi$. Im Intervall $\varphi_* \leqq \varphi < \varphi_\lambda$ können und wollen wir dann rg $(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ so bestimmen, daß $\arg (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ stetig vom Ausgangs-vert $\arg (e^{i\varphi_*} - e^{i\varphi_\lambda})$ anwächst und für $\varphi \to \varphi_\lambda$ gegen einen bestimmten

Grenzwert strebt. Im Intervall $\varphi_* + 2\pi \geqq \varphi > \varphi_\lambda$ können und wollen wir $\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ so bestimmen, daß $\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ stetig vom Wert $\arg(e^{i(\varphi_* + 2\pi)} - e^{i\varphi_\lambda})$ aus abnimmt und für $\varphi \to \varphi_\lambda$ gegen einen bestimmten Grenzwert strebt; dieser Grenzwert ist dann um π größer als derjenige, der für wachsend gegen φ_λ strebendes φ herauskam. $\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_\lambda})$ erfährt also eine sprunghafte Vermehrung um π, wenn φ durch den Wert φ_λ hindurchgeht, und sonst im Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ eine stetige Vermehrung um π, also insgesamt in diesem Intervall eine Vermehrung um 2π.

Setzen wir wiederum

$$\arg Q(e^{i\varphi}) = \arg A + \arg(e^{i\varphi} - x_1) + \cdots + \arg(e^{i\varphi} - x_k) = f(\varphi),$$

so ist, von den Stellen φ_λ abgesehen, $f(\varphi)$ im Intervall $\varphi_* \leqq \varphi \leqq \varphi_* + 2\pi$ stetig; an den Stellen φ_λ ist $f(\varphi)$ sprunghaft unstetig und erfährt an einer Sprungstelle ψ_μ ($\mu = 1, \ldots, m$: $1 \leqq m \leqq l$) eine sprunghafte Vermehrung um soviele Vielfache von π, als es unter den Zahlen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ gleiche gibt, die den Wert ψ_μ haben, d. h. um so viele Vielfache von π, als der Vielfachheit der betreffenden Nullstelle von $Q(x)$ entspricht. Indem wir dem Bild der Funktion $y = f(\varphi)$ die Sprungstrecken $\mathfrak{S}_\mu$ einfügen, bekommen wir eine stetige Kurve $\mathfrak{L}$, die die Punkte (φ_*, Φ_0) und $(\varphi_* + 2\pi, \Phi_1)$ verbindet. Führen wir die Zahl α_0' wie im vorigen Falle ein, so haben die Gerade

$$y = \alpha_0' + n(\varphi - \varphi_*) = g(\varphi)$$

und die Kurve $\mathfrak{L}$ mindestens einen Punkt gemeinsam.

Wir setzen noch $\psi_0 = \varphi_*$ und $\psi_{m+1} = \varphi_* + 2\pi$ und betrachten für $\mu = 0, 1, \ldots, m$ die abgeschlossenen stetigen Kurvenbögen

$$\mathfrak{B}_\mu: \; y = \begin{cases} f(\psi_\mu + 0) & \text{für } \varphi = \psi_\mu, \\ f(\varphi) & \text{für } \psi_\mu < \varphi < \psi_{\mu+1}, \\ f(\psi_{\mu+1} - 0) & \text{für } \varphi = \psi_{\mu+1}. \end{cases}$$

Auch mit mindestens einem dieser Bögen hat die Gerade $y = g(\varphi)$ einen Punkt gemeinsam. Denn trifft sie $\mathfrak{B}_0$ nicht, so trifft sie auch nicht die $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_1$ verbindende Sprungstrecke $\mathfrak{S}_1$, weil dann $\mathfrak{B}_1$ und damit auch $\mathfrak{S}_1$ im Intervall $\psi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$ ganz oberhalb der Geraden liegen; trifft sie $\mathfrak{B}_1$ nicht, so trifft sie auch nicht die $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ verbindende Sprungstrecke $\mathfrak{S}_2$ usw. Hat also die Gerade keinen der Bögen $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{m-1}$ getroffen, so muß sie den Bogen $\mathfrak{B}_m$ treffen, da sie sonst auch mit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{S}_2 + \cdots + \mathfrak{B}_{m-1} + \mathfrak{S}_m + \mathfrak{B}_m$$

keinen Schnittpunkt gemeinsam hätte, entgegen der obigen Feststellung.

Einen der Schnittpunkte der Geraden $y = g(\varphi)$ mit der Punktmenge $\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 + \cdots + \mathfrak{B}_m$ greifen wir heraus und bezeichnen seine

bszisse mit φ_0. Gibt es eine Nummer μ_0 derart, daß $\psi_{\mu_0} < \varphi_0 < \psi_{\mu_0+1}$, ist, wenn $x_0 = e^{i\varphi_0}$ gesetzt wird, $Q(x_0) \neq 0$ und

$$\begin{aligned}\arg Q(x_0) = \arg Q(e^{i\varphi_0}) = f(\varphi_0) &= \alpha_0' + n(\varphi_0 - \varphi_*) \\ &= \alpha_0' + \arg (e^{i\varphi_0})^n - n\psi_*,\end{aligned}$$

enn $\arg (e^{i\varphi_0})^n$ geeignet gewählt wird, also bei der Beschränkung, e wir φ_* auferlegten,

$$\alpha_0' - \varepsilon < \arg Q(x_0) - \arg x_0^n < \alpha_0 + \varepsilon.$$

ehmen wir aber die Bestimmung der Argumente irgendwie anders or, so ändert sich das mittlere Glied dieser Ungleichung nur um n Vielfaches von 2π: es gilt also wiederum eine Ungleichung

$$\alpha_0 - \varepsilon < \arg Q(x_0) - \arg x_0^n < \alpha_0^0 + \varepsilon,$$

o auch α_0 eine zu $\alpha \bmod 2\pi$ kongruente Zahl ist.

Ist aber $\varphi_0 = \psi_{\mu_0}$, wo μ_0 eine der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ bedeutet, so t entweder $g(\varphi_0) = f(\psi_{\mu_0} - 0)$ oder $g(\psi_0) = f(\psi_{\mu_0} - 0)$ und $Q(e^{i\varphi_0}) = 0$. ann können wir aber φ_0' so nahe bei φ_0 wählen, daß zwar $(x_0) = Q(e^{i\varphi_0'}) \neq 0$ ist, aber trotzdem

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqq f(\varphi_0') - g(\varphi_0') \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

leibt, d. h. bei geeigneter Bestimmung von $\arg (x_0^n) = \arg e^{i\varphi_0'}$ auch

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n - \alpha_0' + n\varphi_* \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

nd damit

$$\alpha_0' - \varepsilon \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n \leqq \alpha_0' + \varepsilon$$

ird. Aus dieser Feststellung folgt wiederum, daß auch bei jeder on der hier vorgenommenen abweichenden Bestimmung der Argu- ente eine Ungleichung der Form

$$\alpha_0 - \varepsilon \leqq \arg Q(x_0) - \arg x_0^n \leqq \alpha_0 + \varepsilon$$

ilt, wenn α_0 in geeigneter Weise zu $\alpha \bmod 2\pi$ kongruent gewählt ist.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 22. November 1943.)

Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten.

III. Ein Einzigkeitssatz.

Von

H. Grunsky in Trossingen (Württ.)

Einleitung.

1. Im folgenden handelt es sich um den Beweis für die Einzigkeit der Lösung eines gewissen Extremalproblems [1]). Dem in Teil I dieser Arbeit [2]) formulierten Satz I liegt eine Klasse von Funktionen zugrunde, die in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet regulär, eindeutig und gleichmäßig beschränkt sind und in einem festen inneren Punkt verschwinden. Behauptet wurde unter anderem, daß es unter diesen Funktionen im wesentlichen nur eine einzige gibt, die in einem zweiten vorgegebenen innern Punkt möglichst großen Betrag annimmt. Der übrige Inhalt von Satz I ist ein Spezialfall des in Teil II [2]) bewiesenen Satzes IV, der aber keine Einzigkeitsaussage enthält. Der Beweis dieses Teiles von Satz I steht also noch aus und wird uns hier beschäftigen. Doch kann ich ihn auch jetzt noch nicht allgemein geben, muß mich vielmehr auf den Fall eines dreifach zusammenhängenden Gebietes beschränken. Die Untersuchung der Einzigkeitsfrage für den entsprechenden Spezialfall des allgemeineren Extremalproblems von Satz IV stelle ich, obgleich sie mit denselben Mitteln durchzuführen wäre, zurück, damit nicht der an sich einfache Gedankengang in einem übergroßen Vielerlei von Fallunterscheidungen zu sehr an Deutlichkeit verliere. Ich werde also beweisen:

Satz Ia′: *$\mathfrak{B}$ sei ein dreifach zusammenhängendes schlichtes Gebiet ohne punktförmige Randkomponente, z_0 und z^* seien zwei verschiedene innere Punkte desselben. $\mathfrak{K}_1$ sei die Klasse der in $\mathfrak{B}$ regulären, eindeutigen Funktionen $F(z)$ mit $|F(z)| < 1$, $F(z_0) = 0$. Dann gibt es in $\mathfrak{K}_1$, abgesehen von einem willkürlichen konstanten Faktor vom Betrage 1, genau eine Funktion $F_1(z)$, für die $|F(z^*)|$ ein absolutes Maximum innerhalb von $\mathfrak{K}_1$ erreicht.*

[1]) Über den Inhalt dieser Arbeit habe ich auf der Tagung der DMV in Jena im Oktober 1941 vorgetragen; vgl. den Bericht in J.-Ber. Deutsche Math.-Vereinig. **52** (1942), 2. Abt., S. 33.

[2]) Teil I und II: J.-Ber. Deutsche Math.-Vereinig. **50** (1940), 230—255; **52** (1942), 118—132.

2. Aus dem schon bewiesenen Teil von Satz 1 wissen wir, daß jede nktion $w = F(z)$ mit der Extremaleigenschaft das Gebiet $\mathfrak{B}$ auf ein EMANNsches Flächenstück abbildet, das $|w| < 1$ überall dreimal be- ckt; dabei geht jede der drei Randkomponenten in den einmal rchlaufenen Rand des Einheitskreises über. Damit ist eine Teil- asse $\mathfrak{K}_I'$ aus $\mathfrak{K}_I$ ausgesondert, in der die Extremalfunktionen zu suchen nd. Es wird sich zeigen, daß die Elemente von $\mathfrak{K}_I'$ im allgemeinen ne geschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ bilden (auf der, n gewissen Ausnahmen abgesehen, jede Funktion von $\mathfrak{K}_I'$ zweimal ftritt). $|F(z^*)|$ ist nun eine Funktion auf $\mathfrak{M}$, und es wird nach der nzahl der Stellen gefragt, in denen sie ihr absolutes Maximum er- icht. Die Antwort stützt sich auf zwei Überlegungen: erstens ziehen r die KRONECKERsche Formel heran, die die Anzahl der (relativen) axima, Minima und Sattelwerte mit dem Geschlecht von $\mathfrak{M}$ verknüpft. veitens bestimmen wir die Gesamtzahl der stationären Stellen, und ar mittels der EULER-LAGRANGEschen Multiplikatorenregel. Aus diesen iden Beziehungen lassen sich die drei Anzahlen ermitteln, wenn man ch die selbstverständlichen Mindestanzahlen der Maxima und Minima rücksichtigt. Es wird sich dabei ergeben, daß es innerhalb von $\mathfrak{K}_I'$ wesentlichen sogar nur ein relatives Maximum gibt.

Durchführung des Beweises.

1. Die eingeengte Funktionsklasse als zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir voraussetzen, ie drei Komponenten C_0, C_1, C_2, des Randes C von $\mathfrak{B}$ seien geschlossene nalytische Kurven und $\mathfrak{B}$ sei beschränkt; durch C_0 werde $\mathfrak{B}$ vom unkte ∞ getrennt.

1. 1. Jede Funktion $F(z)$ aus $\mathfrak{K}_I'$ hat außer der vorgeschriebenen ullstelle z_0 noch zwei zusätzliche, z_1 und z_2, und sie ist durch diese is auf einen konstanten Faktor vom Betrage 1 völlig bestimmt. Aber amit ein Paar $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ von Punkten aus $\mathfrak{B}$ als Paar zusätzlicher ullstellen einer Funktion aus $\mathfrak{K}_I'$ brauchbar sei, muß es gewissen edingungen genügen. Setzen wir für $F(z) \in \mathfrak{K}_I'$:

$$\log F(z) = T(z) = t(z) + i\, t^*(z),$$

ist $t(z)$ eine in $\mathfrak{B}$ überall reguläre harmonische Funktion, abge- hen von den Punkten z_ι $(\iota = 0, 1, 2)$, wo sie sich wie $\log|z - z_\iota|$ erhält, welche auf dem Rande verschwindet. Diese Eigenschaften nd kennzeichnend für $t(z)$: sie kommen aber der Funktion $-\sum_{\iota=0}^{2} g(z; z_\iota)$ u, wenn $g(z; \zeta)$ die GREENsche Funktion von $\mathfrak{B}$ mit der Singularität ζ ezeichnet; also ist

$$t(z) = -\sum_{\iota=0}^{2} g(z; z_\iota).$$

Ein solches $t(z)$ kann zwar zu jedem Paar $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ gebildet werden, aber dafür, daß zu ihm ein $F(z)$ aus $\mathfrak{R}_I$ gehört, ist notwendig und hinreichend, daß die konjugierte Funktion $t^*(z)$ mod 2π eindeutig in $\mathfrak{B}$ ausfällt, und aus dieser Forderung ergeben sich Einschränkungen für die Wahl von z_1 und z_2. $t^*(z)$ erfüllt nämlich dann und nur dann die besagte Forderung, wenn es sich bei einfachen Umläufen um C_1 und C_2 nur um ganzzahlige Vielfache von 2π ändert, d. h. wenn die zu C_ι gehörigen Perioden

$$\tau_\iota = \int_{C_\iota} d\,t^*(z) \equiv 0 \pmod{2\pi} \qquad (\iota = 1, 2)$$

sind. Hier dürfen wir an Stelle von $\equiv 0 \bmod 2\pi$ schreiben: $= 2\pi$, denn τ_ι ist ja die Änderung von arc w in $w = F(z)$, wenn z die Randkomponente C_ι, w also einmal den Einheitskreis durchläuft. Es ist aber, wenn s die Bogenlänge auf C_ι, n die in das Innere von $\mathfrak{B}$ weisende Normale bezeichnet:

$$\tau_\iota = \int_{C_\iota} d\,t^*(z) = \int_{C_\iota} \frac{\partial\, t^*(z)}{\partial\, s}\, ds = -\int_{C_\iota} \frac{\partial\, t(z)}{\partial\, n}\, ds$$

$$= \sum_{\iota'=0}^{2} \int_{C_\iota} \frac{\partial\, g(z; z_{\iota'})}{\partial_z\, n}\, ds = \sum_{\iota'=0}^{2} \gamma_\iota(z_{\iota'}).$$

Hier ist $\gamma_\iota(z)$ diejenige in $\mathfrak{B}$ überall reguläre harmonische Funktion, die auf C_ι die Randwerte 2π, auf den beiden andern Randkomponenten die Randwerte 0 annimmt, also das 2π-fache des harmonischen Maßes von C_ι. Die Bedingungen, denen die Wahl des Paares $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ der zusätzlichen Nullstellen unterworfen ist — wir nennen sie im folgenden kurz die Periodenbedingungen — können wir also, indem wir γ_1 und γ_2 zu einem Vektor γ zusammenfassen und $(2\pi, 2\pi) = \alpha$ setzen, so schreiben:

(1. 1) $$\gamma(z_0) + \gamma(z_1) + \gamma(z_2) = \alpha$$

oder:

(1. 2) $$\gamma(z_1) = (\alpha - \gamma(z_0)) - \gamma(z_2).$$

Wir deuten die hier auftretenden Vektoren als Ortsvektoren τ in einer Ebene — wir nennen sie die Periodenebene —, und lassen z_1 und z_2 unabhängig voneinander in $\mathfrak{B}$ variieren. Dann werden durch die in (1. 2) links bzw. rechts stehenden Vektorfunktionen

(1. 3) $$\tau = \gamma(z_1)$$

(1. 4) $$\tau = \gamma_{z_0}(z_2) = (\alpha - \gamma(z_0)) - \gamma(z_2)$$

zwei Abbildungen von $\mathfrak{B}$ in die Periodenebene vermittelt (von denen die zweite noch von z_0 als Parameter abhängt), und ein Paar $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ ist dann und nur dann ein brauchbares, d. h. ein solches, das auf

ine Funktion $F(z)$ aus $\mathfrak{K}_l'$ führt, wenn die Bilder von z_1 und z_2 ver-
öge dieser beiden Abbildungen zusammenfallen. Nennen wir $\Delta^{(1)}$ bzw.
$^{(2)}$ die Bildmengen von $\mathfrak{B}$ bei den beiden Abbildungen (1. 3) und (1. 4),
ihren Durchschnitt, so sind also die brauchbaren Paare die Paare
on Urbildern der Punkte von Δ bei diesen beiden Abbildungen. Um
inen Überblick über sie zu gewinnen, haben wir also die Abbildung

1. 5) $$\tau = \gamma(z),$$

it der ja auch (1. 4) in der einfachsten Weise zusammenhängt, sowie
re Umkehrung zu untersuchen.

1. 2. Die Abbildung (1. 5) ist im kleinen umkehrbar eindeutig für
lle die Stellen $z = x + iy$, für die die Funktionaldeterminante

1. 6) $$\begin{vmatrix} \gamma_{1x} & \gamma_{1y} \\ \gamma_{2x} & \gamma_{2y} \end{vmatrix} \neq 0$$

st. Ihr Verschwinden für ein gewisses $z = \zeta$ ist gleichbedeutend
amit, daß es eine Linearkombination von γ_1 und γ_2 mit reellen nicht
ugleich verschwindenden Koeffizienten gibt:

$$\gamma_\lambda(z) = \lambda_1 \gamma_1(z) + \lambda_2 \gamma_2(z),$$

ür die $\gamma_{\lambda x}(\xi) = \gamma_{\lambda y}(\xi) = 0$ ist. Durch die zugehörigen analytischen
unktionen[3]) Γ_λ, Γ_1, Γ_2 ausgedrückt, bedeutet das:

$$\Gamma_\lambda'(\xi) = \lambda_1 \Gamma_1'(\xi) + \lambda_2 \Gamma_2'(\xi) = 0.$$

Nur wenn diese Gleichung eine reelle Lösung besitzt, d. h., wenn

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma_2'(z)}{\Gamma_1'(z)}$$

ür $z = \xi$ reell ist, kann es sein, daß (1. 5) in der Umgebung von
$= \xi$ nicht eindeutig umkehrbar ist.

Um die Stellen z mit reellem $\Psi(z)$ überblicken zu können, unter-
uchen wir die durch $w = \Psi(z)$ vermittelte konforme Abbildung.
Auf C ist $\Psi(z) = \frac{d\Gamma_2}{d\Gamma_1}$, und hier sind Zähler und Nenner rein ima-
ginär, $\Psi(z)$ also reell. Ferner haben Γ_1' und Γ_2' nach einem Hilfssatz
aus Teil I[4]) je genau eine Nullstelle im Innern von $\mathfrak{B}$ oder zwei auf

[3]) Durchweg bezeichnen wir eine harmonische Funktion mit einem kleinen,
eine analytische Funktion, deren Realteil jene ist, mit dem entsprechenden großen
Buchstaben. Die Unbestimmtheit ihres Imaginärteils um eine additive Konstante
kann nirgends zu Mißverständnissen Anlaß geben.

[4]) Dieser *Hilfssatz* lautet: $\mathfrak{B}$ sei ein $(n+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet,
dessen Randkomponenten als analytische Kurven angenommen seien. $\mathfrak{G}(z)$ eine
überall in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion, ausgenommen Q Stellen, in denen sie logarith-
mische Singularitäten besitze: ihre Ableitung sei eindeutig, ihr Realteil auf jeder
Randkomponente konstant. Dann liegen auf jeder Randkomponente eine gerade
Anzahl von Nullstellen von $\mathfrak{G}'(z)$, und wenn deren N in $\mathfrak{B}$, $2\mathsf{N}$ auf dem Rande
liegen, so ist $N + \mathsf{N} - Q = n - 1$.

dem Rande. Die zweite Möglichkeit scheidet aus, denn $\Gamma_1'(z) = 0$ in einem Randpunkt würde im Widerspruch stehen dazu, daß das durch $\omega = \Gamma_1(z)$ entworfene Bild von $\mathfrak{B}$ jeweils ganz zwischen den beiden Geraden $\Re\omega = 0$ und $\Re\omega = 2\pi$ liegt, auf die das Bild des Randes fällt. Die Nullstellen von Γ_1' und Γ_2' sind voneinander verschieden, da sonst Ψ regulär und nullstellenfrei und also mit Rücksicht auf sein Randverhalten konstant, sagen wir gleich a, wäre; dann wäre $\Gamma_2' - a\Gamma_1' = 0$, $\Gamma_2 - a\Gamma_1 = \text{const}$, und das ist nicht möglich, da diese Funktion auf verschiedenen Randkomponenten verschiedene Werte hat.

Also ist $\Psi(z)$ eine in $\mathfrak{B}$ eindeutige, bis auf einen Pol und eine Nullstelle reguläre und nullstellenfreie Funktion, die auf dem Rande reelle Werte annimmt. Sie bildet also $\mathfrak{B}$ auf ein schlichtes Schlitzgebiet ab, dessen Schlitze auf der reellen Achse im Endlichen liegen.

Die eindeutige Umkehrbarkeit im kleinen der Abbildung (1. 5) besteht also überall in $\mathfrak{B}$, ausgenommen allenfalls in den Punkten, die durch $w = \Psi(z)$ auf die reelle Achse abgebildet werden. Für den Bildbereich bei dieser Abbildung ist die reelle Achse Symmetrielinie; ihr Urbild in $\mathfrak{B}$ sei $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{01} + \mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{20}$, wobei $\mathfrak{S}_{lx}$ die beiden Randkomponenten C_l und C_x miteinander verbindet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, $\mathfrak{S}$ liege selbst auf der reellen Achse und $\mathfrak{B}$ sei zu ihr symmetrisch.

In jeder der beiden Hälften, in die $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{S}$ zerlegt wird, ist die Abbildung (1. 5) im kleinen eindeutig umkehrbar; Punkte, die in bezug auf $\mathfrak{S}$ spiegelbildlich liegen, haben denselben Bildpunkt. Wir können auf eindeutige Umkehrbarkeit im großen in jeder der beiden Hälften schließen, wenn wir zeigen können, daß deren Ränder in einfach geschlossene Kurven übergehen. Nun bestehen diese Ränder aus je einer Hälfte der Komponenten von C und aus den drei Abschnitten von $\mathfrak{S}$. Auf jeder Randkomponente ist $\gamma(z)$ konstant, nämlich gleich $\alpha_0^{(1)} = (0, 0)$ auf C_0, gleich $\alpha_1^{(1)} = (2\pi, 0)$ auf C_1, gleich $\alpha_2^{(1)} = (0, 2\pi)$ auf C_2, und im Innern von $\mathfrak{B}$ gilt:

$$0 < \gamma_1(z) < 2\pi; \quad 0 < \gamma_2(z) < 2\pi; \quad 0 < \gamma_1(z) + \gamma_2(z) = 2\pi - \gamma_0(z) < 2\pi.$$

Das Bild $\Delta^{(1)}$ von $\mathfrak{B}$ liegt also ganz im Innern des geradlinig berandeten Dreiecks $\Delta^{(1)}$ mit den Ecken $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$. Jeder der Abschnitte $\mathfrak{S}_{lx}$ geht in einen stetig differenzierbaren Bogen $\sum_{lx}^{(1)}$ über, der $\alpha_l^{(1)}$ mit $\alpha_x^{(1)}$ durch das Innere von $\Delta^{(1)}$ hindurch verbindet.

Wir zeigen, daß die $\sum_{lx}^{(1)}$ zusammen eine einfach geschlossene Kurve bilden, d. h. daß die Abbildung auf $\mathfrak{S}$ eindeutig umkehrbar ist. Gäbe es nämlich auf $\mathfrak{S}$ zwei Punkte mit dem gleichen Bildpunkt, so läge dieser auf einer geschlossenen Kurve, die ganz aus Bogen der $\sum_{lx}^{(1)}$ bestünde und außer jenem Punkt höchstens noch einen weiteren, nämlich ein $\alpha_l^{(1)}$, mit unstetiger Tangentenrichtung besäße. In mindestens

nem Paar von Punkten dieser Kurve hätte man dieselbe Tangentenchtung. Diese ist aber gegeben durch

$$\frac{\gamma_{2x}}{\gamma_{1x}} = \frac{\Re e\, \Gamma_2'}{\Re e\, \Gamma_1'}.$$

n nun auf $\mathfrak{S}$ wegen der Symmetrie $\Im m\, \Gamma_2' = -\gamma_{2y} = \Im m\, \Gamma_1' = -\gamma_{1y} = 0$ lt, so ist dort

$$\frac{\gamma_{2x}}{\gamma_{1x}} = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'} = \Psi,$$

nd die zu widerlegende Annahme widerspricht der Schlichtheit von $f(z)$. — Ebenso ergibt sich, daß sich die Tangente an jeden der pgen $\sum_{\iota x}^{(1)}$ beim Durchlaufen desselben in einerlei Sinn dreht.

Die Bildmenge $\Delta^{(1)}$ bei der Abbildung (1. 5) ist also ein gewisses rummlinig berandetes abgeschlossenes Dreieck, die Ecken $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ isgenommen, die bzw. den Randkomponenten C_0, C_1, C_2 entsprechen; ine Seiten verlaufen je mit Krümmung einerlei Vorzeichens ganz n Innern des geradlinig berandeten Dreiecks mit denselben Ecken ig. 1). Jeder innere Punkt von $\Delta^{(1)}$ hat in $\mathfrak{B}$ zwei in bezug auf $\mathfrak{S}$ rmmetrisch liegende Urbilder, jeder Randpunkt, die Ecken ausenommen, ein Urbild auf $\mathfrak{S}$.

1. 3. Nunmehr können wir die am Schluß von **1. 1.** angedeutete rörterung der Auswahl der brauchbaren Paare, wie sie durch (1. 2) etroffen wird, durchführen (vgl. dazu Fig. 1 und 2). Alles zu $\Delta^{(2)}$ ehörige werde durch den oberen Index 2, im übrigen gleich wie die ntsprechenden Stücke von $\Delta^{(1)}$ bezeichnet. $\Delta^{(2)}$ geht aus $\Delta^{(1)}$ durch ine Drehung um den Punkt $\alpha_0^{(1)}$ um π und nachfolgende Parallelerschiebung um $\alpha_0^{(2)} = \alpha - \gamma(z_0)$ hervor. Für die Ecke $\alpha_0^{(2)}$ ist, je nach age von z_0, jeder Punkt im Innern eines zu $\Delta^{(1)}$ kongruenten Dreicks $\Delta^{(0)}$ möglich, dessen Ecken $\alpha_0^{(0)} = \alpha$, $\alpha_1^{(0)} = \alpha_2^{(1)}$, $\alpha_2^{(0)} = \alpha_1^{(1)}$ sind. $^{(1)}$ und $\Delta^{(2)}$ vertauschen die Plätze durch Drehung um den Winkel um das Symmetriezentrum $\sigma = \frac{1}{2}\alpha_0^{(2)}$.

Um ein Bild von Δ zu bekommen, macht man sich nun leicht ie folgenden einfachen Tatsachen klar: $\sum_{\iota x}^{(1)}$ schneidet $\sum_{\iota' x'}^{(2)}$ bei $, x) \neq (\iota', x')$ einmal; bei $(\iota, x) = (\iota', x')$ sind beide Bogen entweder unktfremd, oder sie berühren sich oder sie schneiden sich in zwei unkten, und zwar hat höchstens ein Paar $\sum_{\iota x}^{(1)}$, $\sum_{\iota x}^{(2)}$ gemeinsame Punkte. enn wenn das z. B. für $\sum_{12}^{(1)}$ und $\sum_{12}^{(2)}$ der Fall ist, so liegen die Schnittunkte in dem Parallelstreifen zwischen ihren Tangenten in $\alpha_1^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)}$. nd dieser trennt $\sum_{01}^{(1)}$ und $\sum_{01}^{(2)}$ voneinander.

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

{1; 1}. Die drei Paare entsprechender Bogen $\sum_{\iota x}^{(1)}$, $\sum_{\iota x}^{(2)}$ sind punktremd. Dann ist Δ ein zusammenhängender Bereich und das Symmeriezentrum σ gehört seinem Innern an (Fig. 1).

$\{\mathbf{1}; 2\}$. Ein Paar $\sum_{12}^{(1)}, \sum_{12}^{(2)}$ schneidet sich in zwei Punkten. Dann besteht Δ aus zwei punktfremden Bereichen und σ liegt außerhalb von Δ (Fig. 2; dort ist $(\iota, \varkappa) = (1, 2)$).

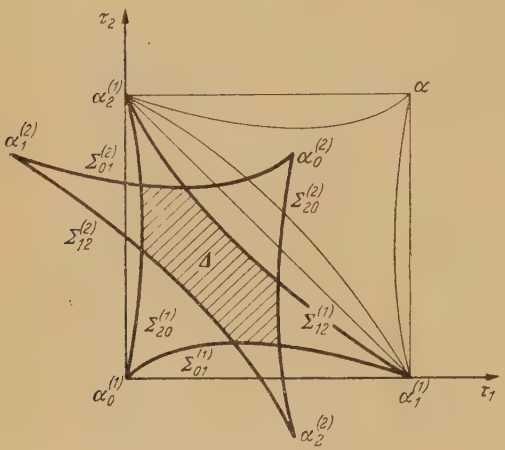

Fig. 1.

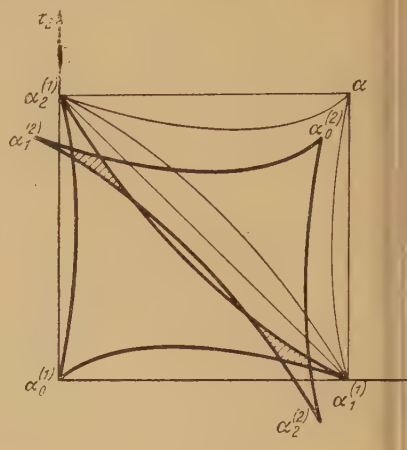

Fig. 2.

Der dritte Fall ist der Grenzfall zu diesen beiden:

$\{\mathbf{1}; 1, 2\}$. Eines der genannten Paare berührt sich in einem Punkt σ, Δ besteht aus zwei Bereichen mit einem gemeinsamen Randpunkt σ und dieser ist das Symmetriezentrum σ.

Dem Δ entspricht nun in jeder der beiden Hälften von $\mathfrak{B}$ als Urbild bei der Abbildung (1. 3) umkehrbar eindeutig ein Teilbereich, und diese beiden zusammen machen die Menge $\mathfrak{M}'$ der für z_1 und — wegen der Gleichberechtigung von z_1 und z_2 — für z_2 in den brauchbaren Paaren möglichen Punkte aus. Die Gestalt von $\mathfrak{M}'$ macht man sich leicht klar, indem man überlegt, daß z. B. dem Teilbogen von $\sum_{01}^{(2)}$, der zum Rande von Δ gehört, als Urbild bei der Abbildung (1. 3) in beiden Hälften von $\mathfrak{B}$ ein ganz im Innern verlaufender, $\mathfrak{S}_{12}$ und $\mathfrak{S}_{20}$ verbindender Bogen entspricht; beide zusammen bilden eine einfach geschlossene, C_2 umschließende Kurve C_2'. Auf diese Weise findet man, entsprechend der vorigen Fallunterscheidung:

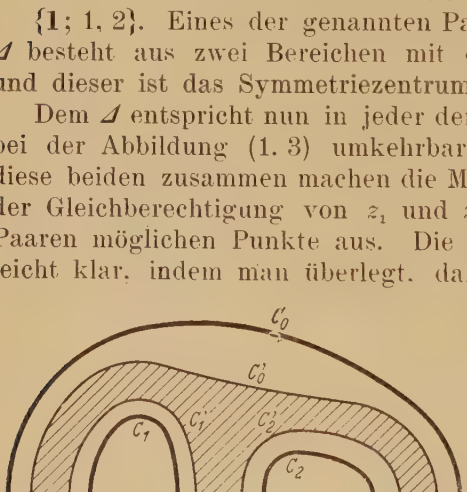

Fig. 3.

$\{\mathbf{1}; 1\}$. $\mathfrak{M}'$ ist ein dreifach zusammenhängender Bereich; seine Randkomponenten C_0', C_1', C_2' sind denen von $\mathfrak{B}$ in dem Sinne zugeordnet, daß C_ν durch C_ν' von $\mathfrak{M}'$ getrennt wird (Fig. 3).

$\{\mathbf{1}; 2\}$. $\mathfrak{M}'$ zerfällt in zwei punktfremde Ringbereiche. Jeder derselben trennt eine Randkomponente von $\mathfrak{B}$ von den beiden andern.

$\{\mathbf{1}; 1, 2\}$. $\mathfrak{M}'$ besteht aus zwei Ringbereichen, die einen auf $\mathfrak{S}$ gelegenden Randpunkt gemeinsam haben.

Zu jedem z_1 im Innern von $\mathfrak{M}'$ gehören zwei symmetrisch zu $\mathfrak{S}$ gelegende Punkte z_2, die mit z_1 zusammen ein brauchbares Paar bilden, nämlich die beiden Punkte, deren Bilder bei der Abbildung (1. 4) nach (z_1) fallen; zu jedem z_1 auf dem Rande von $\mathfrak{M}'$ gehört in demselben Sinne ein z_2 auf $\mathfrak{S}$. Zu jedem inneren Punkt von $\mathfrak{M}'$ als z_1 gehören also zwei verschiedene Elemente in der Menge $\mathfrak{M}$ der brauchbaren Paare $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$, zu jedem Randpunkt eines. Diese Paare lassen sich also umkehrbar eindeutig und stetig den Punkten der Vorder- und Rückseite von $\mathfrak{M}'$ zuordnen. Für $\mathfrak{M}$ sind daher die drei folgenden Fälle zu unterscheiden:

$\{\mathbf{1}; 1\}$. $\mathfrak{M}$ ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit vom Geschlecht 2. Es gibt auf $\mathfrak{M}$ zwei Symmetriestellen $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ mit $z_1 = z_2$: sie gehen aus dem Symmetriezentrum σ hervor; ihre Bilder in $\mathfrak{M}'$ liegen symmetrisch zu $\mathfrak{S}$, also nicht auf $\mathfrak{S}$.

$\{\mathbf{1}; 2\}$. $\mathfrak{M}$ besteht aus zwei punktfremden geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht 1; es gibt keine Symmetriestelle.

$\{\mathbf{1}; 1, 2\}$. $\mathfrak{M}$ besteht aus zwei geschlossenen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht 1, die einen Punkt $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ mit $z_1 = z_2$ gemeinsam haben.

Den letzten Fall schließen wir vorerst aus der Betrachtung aus.

$\mathfrak{M}$ ist, den Grenzfall $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ ausgenommen, eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit, d. h. die Umgebung einer jeden Stelle ist das umkehrbar eindeutige Bild eines ebenen Gebietes, wobei z_1 und z_2 stetig differenzierbare Funktionen der Parameter dieses Gebietes sind. Man ersieht das aus der Darstellung von $\mathfrak{M}$ durch die Vorder- und Rückseite von $\mathfrak{M}'$.

Auf $\mathfrak{M}$ ist nun jede Funktion aus $\mathfrak{K}'$, wenn ihre zusätzlichen Nullstellen z_1 und z_2 voneinander verschieden sind, zweimal vertreten, nämlich durch $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ und durch $\mathfrak{z} = (z_2, z_1)$, dagegen nur einmal, wenn ihre zusätzlichen Nullstellen zusammenfallen.

1. 4. $\mathfrak{M}$ hängt von z_0 ab, und zwar, wie wir beweisen wollen, stetig im Sinne der folgenden Erklärung: Ist $\mathfrak{M}(p)$ eine von einem Parameter p abhängende abgeschlossene Punktmenge, so heißt die Abhängigkeit für $p = p_0$ stetig, wenn $\mathfrak{M}(p)$ für alle p mit hinreichend kleinem $|p - p_0|$ in eine beliebig kleine Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{M}(p_0)$ eindringt, während es zu jedem Punkt, der nicht zu $\mathfrak{M}(p_0)$ gehört, eine Umgebung gibt, in die kein solches $\mathfrak{M}(p)$ eindringt[5]).

[5]) Der zugrundeliegende Limesbegriff ist der des abgeschlossenen Limes einer Mengenfolge. Vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre, 3. Aufl., S. 145—150.

Bei allen von z_0 als Parameter abhängenden Gebilden, wie $\Delta^{(z_0)}$, Δ, $\mathfrak{M}$ fügen wir, wenn wir verschiedene Werte desselben nebeneinander betrachten, den jeweiligen Wert in Klammer bei. Es sei $z_0^{(0)}$ irgendeine feste Stelle, $z_0^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine beliebig herausgegriffene Folge von Stellen aus $\mathfrak{B}$ mit $\lim z_0^{(\nu)} = z_0^{(0)}$; ferner sei $\mathfrak{M}^{(\nu)} = \mathfrak{M}(z_0^{(\nu)})$, $\mathfrak{M}^{(0)} = \mathfrak{M}(z_0^{(0)})$, $\mathfrak{z}^{(\nu)} = (z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)})$ eine Stelle auf $\mathfrak{M}^{(\nu)}$. Dann ist zu zeigen: a) Jede Stelle $\mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ von $\mathfrak{M}^{(0)}$ ist Häufungsstelle einer gewissen Folge von Stellen $\mathfrak{z}^{(\nu)}(\nu = 1, 2, \ldots)$. b) Jede Häufungsstelle einer Folge $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ liegt auf $\mathfrak{M}^{(0)}$. b) folgt daraus, daß nach der Erklärung von $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ für jedes ν gilt (vgl. (1. 1)): $\sum_{i=0}^{2} \gamma(z_i^{(\nu)}) = \alpha$. Macht man den Grenzübergang über eine Folge von Werten ν, für die $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ konvergiert, so folgt diejenige Gleichung, die besagt, daß der zugehörige $\lim \mathfrak{z}^{(\nu)}$ auf $\mathfrak{M}^{(0)}$ liegt. — Um a) einzusehen, bezeichnen wir die zwei Umkehrungen jeder der beiden Abbildungen (1. 3) und (1. 4) bzw. mit

$$z_1 = \gamma^{-1'}(\tau), \quad z_1 = \gamma^{-1''}(\tau); \tag{1. 7}$$

$$z_2 = \gamma_{z_0}^{-1'}(\tau), \quad z_2 = \gamma_{z_0}^{-1''}(\tau). \tag{1. 8}$$

Diese Abbildungen sind in $\Delta^{(1)}$ bzw. $\Delta^{(2)}$ stetig; die Abbildungen (1. 8) hängen ferner in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\Delta^{(2)}$ gleichmäßig stetig von z_0 ab; das ergibt sich beispielsweise für $\gamma_{z_0}^{-1'}$ aus der folgenden, den Zusammenhang mit $\gamma^{-1'}$ angebenden Darstellung (vgl. (1. 4)), zusammen mit der gleichmäßigen Stetigkeit von $\gamma^{-1'}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\Delta^{(1)}$:

$$\gamma_{z_0}^{-1'}(\tau) = \gamma^{-1'}(\alpha - \gamma(z_0) - \tau).$$

$z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ gehen nun aus einer bestimmten Stelle $\tau^{(0)} \in \Delta(z_0^{(0)})$ hervor, indem man je eine der beiden Abbildungen (1. 7) und (1. 8) mit $z_0 = z_0^{(0)}$ auf sie anwendet, sagen wir jeweils die erste:

$$z_1^{(0)} = \gamma^{-1'}(\tau^{(0)}), \quad z_2^{(0)} = \gamma_{z_0^{(0)}}^{-1'}(\tau^{(0)}).$$

$\tau^{(0)}$ ist aber Häufungspunkt einer Folge von Punkten $\tau^{(\nu)} \in \Delta(z_0^{(\nu)})$. Wenden wir auf $\tau^{(\nu)}$ je die erste der Abbildungen (1. 7), (1. 8) mit $z_0 = z_0^{(\nu)}$ an, so erhalten wir

$$z_1^{(\nu)} = \gamma^{-1'}(\tau^{(\nu)}), \quad z_2^{(\nu)} = \gamma_{z_0^{(\nu)}}^{-1'}(\tau^{(\nu)}).$$

Diese Stelle $\mathfrak{z}^{(\nu)} = (z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)})$ liegt auf $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ und die Folge der $\mathfrak{z}^{(\nu)}$ strebt wegen der genannten Stetigkeitseigenschaften der Abbildungen (1. 7) und (1. 8) gegen $\mathfrak{z}^{(0)}$.

Auf entsprechende Weise erkennt man, daß die Symmetriestellen von $\mathfrak{M}(z_0)$ stetig von z_0 abhängen.

1. 5. Durch $|F(z^*)|$ mit $F(z) \in \mathfrak{R}_I'$ ist auf $\mathfrak{M}$ eine noch von z^* als Parameter abhängende Funktion $\Phi(\mathfrak{z}; z^*)$ erklärt:

$$\Phi(\mathfrak{z}; z^*) = |F(z^*)| = \exp\left(-g(z_0; z^*) - g(z_1; z^*) - g(z_2; z^*)\right) \tag{1. 9}$$

$$F(z) \in \mathfrak{R}_I', \quad \mathfrak{z} = (z_1, z_2) \in \mathfrak{M}.$$

ie ist auf ihre stationären Stellen hin zu untersuchen. Soweit wir icht gerade auf die Abhängigkeit der auftretenden Funktionen von em Parameter z^* zu achten haben, soll er nicht mit angeschrieben erden.

2. Stationäre Stellen einer Funktion auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Da ich keine Darstellung kenne, in der die hier allein n Frage kommenden einfachen Fälle der benötigten Sätze, insbesondere er Kroneckerschen Formel, in entsprechend einfacher Weise entwickelt erden, so schalte ich eine solche Darstellung ein.

2. 1. **Die Kroneckersche Formel**[6]). $\mathfrak{M}$ sei eine zweidimensionale eschlossene Mannigfaltigkeit. $\Phi(\mathfrak{z})$ eine stetige reelle Funktion auf hr. Ist $\mathfrak{z}_0$ eine beliebige Stelle auf $\mathfrak{M}$, so bestehen zunächst die beiden olgenden Möglichkeiten für das Verhalten von $\Phi(\mathfrak{z})$ in der Umgebung on $\mathfrak{z}_0$:

a) Es gibt beliebig kleine Umgebungen von $\mathfrak{z}_0$, in denen Stellen mit $\Phi(\mathfrak{z}) > \Phi(\mathfrak{z}_0)$ und solche mit $\Phi(\mathfrak{z}) < \Phi(\mathfrak{z}_0)$ liegen.

b) In jeder hinreichend kleinen Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ ist für $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{z}_0$ entweder $\Phi(\mathfrak{z}) \leqq \Phi(\mathfrak{z}_0)$ oder es ist $\Phi(\mathfrak{z}) \geqq \Phi(\mathfrak{z}_0)$.

Wir setzen nun voraus: Für den Fall b), daß das Gleichheitszeichen jeweils ausgeschlossen ist, dann hat Φ in $\mathfrak{z}_0$ ein Maximum bzw. Minimum; für den Fall a), daß es Umgebungen von $\mathfrak{z}_0$ gibt, die n Teilgebiete mit $\mathfrak{z}_0$ als gemeinsamem Randpunkt zerfallen, in denen $\Phi(\mathfrak{z}) > \Phi(\mathfrak{z}_0)$ oder $\Phi(\mathfrak{z}) < \Phi(\mathfrak{z}_0)$ gilt, und die durch stetige Kurven mit $\Phi(\mathfrak{z}) = \Phi(\mathfrak{z}_0)$ voneinander getrennt werden. Ist nun a_1) die Anzahl dieser Gebiete gleich 2, so heißt $\mathfrak{z}_0$ ein gewöhnlicher Punkt, $\Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein gewöhnlicher Wert; ist dagegen a_2) jene Anzahl gleich $2(k+1)$ mit $k > 0$, so heißt $\mathfrak{z}_0$ ein k-facher Sattelpunkt, $\Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein solcher Sattelwert.

Maxima, Minima und Sattelwerte werden zusammenfassend als stationäre Werte, die Stellen, in denen sie auftreten, als stationäre Stellen bezeichnet. Wir setzen voraus, daß sie isoliert liegen und also nur in endlicher Anzahl auftreten. — Die durch $\Phi(\mathfrak{z}) = \text{const}$ gekennzeichneten Punktmengen auf $\mathfrak{M}$ bestehen, abgesehen von isolierten Punkten, die den Maxima und Minima entsprechen, aus geschlossenen stetigen Kurven und heißen die Niveaulinien von Φ. Durch jeden Punkt geht genau eine solche, abgesehen von den stationären Stellen: durch die Stellen der Maxima und Minima geht keine, durch die Sattelpunkte gehen mehrere. — Wir beweisen nun den

Satz *(Kroneckersche Formel): Ist χ die Eulersche Charakteristik von $\mathfrak{M}$, $m^{(0)}$ die Anzahl der Minima von $\Phi(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$, $m^{(1)}$ die der Sattelwerte, jeder mit seiner Vielfachheit gezählt, $m^{(2)}$ die der Maxima, so gilt:*

$$-m^{(0)} + m^{(1)} - m^{(2)} = \chi.$$

[6]) Vgl. M. Morse, Trans. Amer. math. Soc. **27** (1925), 345–396. W. Threlfall, J.-Ber. Deutsche Math. Vereinig. **51** (1941), 14—33.

Ist insbesondere $\mathfrak{M}$ zweiseitig und vom Geschlecht p, so ist

$$-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)}=2p-2.$$

Beweis. Sind α^0, α^1, α^2 bzw. die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen einer beliebigen Triangulation von $\mathfrak{M}$, so ist $\chi=-\alpha^0+\alpha^1-\alpha^2$. Wir werden nun eine Triangulation von $\mathfrak{M}$ benutzen, an der insbesondere die Niveaulinien von Φ beteiligt sind, die zu den stationären Werten gehören.

Ist c ein gewöhnlicher Wert, so besteht die Niveaulinie $\Phi(\mathfrak{z})=c$ aus einer oder mehreren einfach geschlossenen Komponenten. — Im Innern eines schlichtartigen Teilbereiches von $\mathfrak{M}$, dessen Rand zu einer Niveaulinie gehört, liegt mindestens ein Maximum oder Minimum von Φ; denn es können nicht zugleich das Maximum und das Minimum von Φ für einen solchen Bereich auf seinem Rande liegen.

Ist $c_0=\Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein Minimum, so kann eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{z}^{(0)}$ so klein gewählt werden, daß in ihr und auf ihrem Rande R gilt: $\Phi(\mathfrak{z})>\Phi(\mathfrak{z}_0)$ und daß dort keine weiteren stationären Stellen liegen. $\eta>c_0$ sei das Minimum von Φ auf R, c_0' ein Wert mit $c_0<c_0'<\eta$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c_0')$ die größte zusammenhängende, $\mathfrak{z}_0$ enthaltende Teilmenge von $\mathfrak{M}$, auf der $c_0\leqq\Phi(\mathfrak{z})\leqq c_0'$ gilt; sie liegt ganz in $\mathfrak{U}$: ihr Rand N_0' gehört zu der Niveaulinie $\Phi(\mathfrak{z})=c_0'$ und besteht aus einer einzigen Komponenten, da sonst in $\mathfrak{U}$ mehr als eine stationäre Stelle läge. Also ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c_0')$ einfach zusammenhängend.

Es sei ferner c_1 ein gewöhnlicher Wert von Φ, N_1 eine Komponente der Niveaulinie $\Phi(\mathfrak{z})=c_1$. Wir überdecken N_1 mit endlich vielen der Umgebungen seiner Punkte, deren Existenz wir eingangs (Fall a), insbesondere a_1)) vorausgesetzt hatten. Die Teilgebiete derselben, in denen $\Phi(\mathfrak{z})>c_1$ gilt, überdecken einen Ring $\mathfrak{R}(N_1)$, dessen eine Randkomponente N_1 ist, während auf der andern $\Phi(\mathfrak{z})>c_1$ gilt. Genau wie soeben c_0', finden wir nun einen gewöhnlichen Wert $c_1'>c_1$ und einen zugehörigen größten Ringbereich $\mathfrak{R}(N_1;\ c_1,\ c_1')$ auf $\mathfrak{M}$, in dem $c_1\leqq\Phi(\mathfrak{z})\leqq c_1'$ gilt, dessen eine Randkomponente N_1 ist, während die andere zu der Niveaulinie $\Phi(\mathfrak{z})=c_1'$ gehört.

Haben nun c_0 und $\mathfrak{z}_0$ dieselbe Bedeutung wie vorhin und ist $c_0<c\leqq c'$ ein von stationären Werten von Φ freies Intervall, so können wir an den vorhin konstruierten einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c_0')$ (falls $c_0'<c'$ ist) einen Ring $\mathfrak{R}(N_0';\ c_0',\ c_0'')$ mit $c_0'<c_0''\leqq c'$ anschließen und erhalten so einen einfach zusammenhängenden $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c_0'')$; dieses Verfahren können wir fortsetzen bis zur Gewinnung eines $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c')$. Entsprechend können wir von einem Maximum ausgehend verfahren, und ebenso einen Ring $\mathfrak{R}(N_1;\ c_1,\ c_1')$ erweitern. So erhalten wir den

Hilfssatz. Ist $c_0=\Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein Minimum von Φ und ist das Intervall $c_0<c\leqq c'$ von stationären Stellen frei, so ist der $\mathfrak{z}_0$ enthaltende, durch $c_0\leqq\Phi(\mathfrak{z})\leqq c'$ gekennzeichnete größte Teilbereich $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_0;\ c_0,\ c')$ von $\mathfrak{M}$

fach zusammenhängend, hat also die Charakteristik -1. — Dasbe gilt, wenn $c_0 = \Phi(\mathfrak{z}_0)$ ein Maximum ist und alle Ungleichheitschen umgekehrt werden. — Ist $c_1 \leqq c \leqq c_2$ ein von stationären erten von Φ freies Intervall, so besteht der durch $c_1 \leqq \Phi(\mathfrak{z}) \leqq c_2$ kennzeichnete Teilbereich von $\mathfrak{M}$ aus lauter Ringbereichen, hat also Charakteristik 0.

Nun seien $a_0, a_1, \ldots, a_m$ die stationären Werte von Φ, nach chsender Größe geordnet. Wir schalten zwischen je zwei von ihnen en gewöhnlichen Wert c_μ ein: $a_{\mu-1} < c_\mu < a_\mu$, und erklären gewisse ilmengen $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ und $\underline{\mathfrak{M}}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ durch die folgenden Ungleichungen:

$$\overline{\mathfrak{M}}_\mu\colon\ c_\mu \leqq \Phi(\mathfrak{z}) \leqq a_\mu; \quad \underline{\mathfrak{M}}_\mu\colon\ a_\mu \leqq \Phi(\mathfrak{z}) \leqq c_{\mu+1},$$

obei wir jedoch die einem etwaigen Minimum bzw. Maximum a_μ entrechenden isolierten Punkte ausschließen. Zu dem stationären Wert können mehrere stationäre Stellen $\mathfrak{z}_\mu^{(1)}, \ldots, \mathfrak{z}_\mu^{(j)}$ gehören. Es sei wa $\mathfrak{z}_\mu^{(\iota)}$ Stelle eines Maximums: dann enthält $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ eine einfach zummenhängende Komponente $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_\mu^{(\iota)}; c_\mu, a_\mu)$. Ebenso gehört zu jedem nimum eine einfach zusammenhängende Komponente $\mathfrak{M}(\mathfrak{z}_\mu^{(\iota)}; a_\mu, c_{\mu+1})$ n $\underline{\mathfrak{M}}_\mu$. Ist dagegen $\mathfrak{z}_\mu^{(\iota)}$ ein k-facher Sattelpunkt, so approximieren r z. B. $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ durch eine aufsteigende Folge $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$, die mittels einer chsenden Folge $\bar{a}_\mu^{(\nu)}$ mit $\lim \bar{a}_\mu^{(\nu)} = a_\mu$ durch die Ungleichungen

$$\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}\colon\ c_\mu \leqq \Phi(\mathfrak{z}) \leqq \bar{a}_\mu^{(\nu)}$$

klärt ist. Da die Intervalle $c_\mu \leqq c \leqq \bar{a}_\mu^{(\nu)}$ nur gewöhnliche Werte thalten, so besteht $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$ aus lauter Ringbereichen, hat also die harakteristik 0. Jede beliebig kleine Umgebung des k-fachen Sattelnktes $\mathfrak{z}_\mu^{(\iota)}$ enthält, bei hinreichend großem ν, $k+1$ Teilgebiete, die $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$ gehören, bei $\nu \to \infty$ gehen sie in $k+1$ der unter a_2) erwähnten eilgebiete über, die $\mathfrak{z}_\mu^{(\iota)}$ als gemeinsamen Randpunkt haben; d. h. bei esem Grenzübergang werden $k+1$ Randpunkte von $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$ in $\mathfrak{z}_\mu^{(\iota)}$ idenfiziert. Denken wir uns nun $\overline{\mathfrak{M}}_\mu$ irgendwie trianguliert mit $\mathfrak{z}_\mu^{(\iota)}$ als cke, so gibt es eine entsprechende Triangulation von $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$, die k cken mehr, aber gleichviel Kanten und Flächen besitzt; die Charakteistik von $\overline{\mathfrak{M}}_\mu^{(\nu)}$ wird also durch das Hinzutreten des Sattelpunktes i $\nu \to \infty$ um k erhöht. Sie ergibt sich also, wenn wir noch das rige Ergebnis über die Maxima hinzunehmen, zu

$$\chi_\mu = m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)},$$

o $m_\mu^{(1)}$ die Anzahl der Sattelwerte a_μ, mit Vielfachheiten gezählt, $^{(2)}_\mu$ die Anzahl der Maxima a_μ bedeutet. Der zu $\Phi(\mathfrak{z}) = a_\mu$ gehörige

Kantenzug von $\mathfrak{M}_\mu$ hat $m_\mu^{(1)}$ Kanten mehr als Ecken, denn vor de Grenzübergang waren beide Anzahlen gleich. Durch entsprechend Überlegungen findet man für die Charakteristik von $\mathfrak{M}_\mu$

$$\chi_\mu = -m_\mu^{(0)} + m_\mu^{(1)},$$

wo $m_\mu^{(0)}$ die Anzahl der Minima a_μ bedeutet.

Setzen wir nun alle Komplexe $\mathfrak{M}_\mu$ und $\mathfrak{M}_\mu$ zusammen, indem w Kanten und Ecken, die in $\mathfrak{M}$ identisch sind, identifizieren, so geh bei der Zusammenfügung längs Niveaulinien, die zu den gewöhnliche Werten c_μ gehören, gleichviel Kanten und Ecken verloren, so d sich dabei die Charakteristiken einfach addieren. Dagegen geh beim Zusammenfügen von $\mathfrak{M}_\mu$ und $\mathfrak{M}_\mu$ bei festem μ $m_\mu^{(1)}$ Kanten me als Ecken verloren, so daß also in leicht verständlicher Bezeichnung weise gilt:

$$\chi(\mathfrak{M}_\mu + \mathfrak{M}_\mu) = \chi_\mu + \chi_\mu - m_\mu^{(1)} = -m_\mu^{(0)} + m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)}.$$

Summierung über μ ergibt schließlich die Behauptung des Satzes

2. 2. Stationäre Stellen auf einer implicite gegebenen Mannigfalti keit. In dem uns interessierenden Fall ist die zweidimensiona Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ einem vierdimensionalen cartesischen Raum eingebettet, nämlich dem Raum der Paare $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ bei frei ve änderlichen z_1, z_2, aus dem sie durch das Gleichungspaar (1. 1) au gesondert wird. Verwenden wir die folgenden Abkürzungen:

$$\gamma_\iota(\mathfrak{z}) = \gamma_\iota(z_1) + \gamma_\iota(z_2),\ 2\pi - \gamma_\iota(z_0) = c_\iota \qquad (\iota = 1, 2 \tag{2. 1}$$

so können wir jenes Gleichungspaar in der Form schreiben:

$$\gamma_1(\mathfrak{z}) = c_1,\quad \gamma_2(\mathfrak{z}) = c_2. \tag{2. 2}$$

Die auf $\mathfrak{M}$ zu untersuchende Funktion — an Stelle von $\Phi(\mathfrak{z})$ (vg (1. 9)) werden wir meist $\log \Phi(\mathfrak{z})$ nehmen, wobei wir den konstante Bestandteil $-g(z_0)$ weglassen dürfen — ist durch

$$-g(\mathfrak{z}) = -g(z_1) - g(z_2) \tag{2. 3}$$

in dem $\mathfrak{M}$ umgebenden Raum erklärt. Wir wollen die für die Au findung und Untersuchung der stationären Stellen von $g(\mathfrak{z})$ auf benötigten allgemeinen Sätze zusammenstellen und, soweit es zweck mäßig erscheint, beweisen und sehen daher von der besonderen B deutung von $g(\mathfrak{z})$, $\gamma_1(\mathfrak{z})$, $\gamma_2(\mathfrak{z})$ ab; wir setzen nur voraus, daß es sic um reelle analytische Funktionen eines Systems

$$\mathfrak{z} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$$

von vier reellen Veränderlichen handle und daß durch die Gleichunge (2. 2) eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ erklärt werde.

2. 2. 1. In der Umgebung jeder Stelle $\mathfrak{z}^{(0)}$ von $\mathfrak{M}$ lassen sich die oordinaten eines nur auf $\mathfrak{M}$ variierenden Punktes $\mathfrak{z}$ als analytische unktionen eines Paares $v = (v_1, v_2)$ von reellen Ortsparametern rstellen:

$$t_\iota = \psi_\iota(v) \quad (\iota = 1, 2, 3, 4),$$

obei für die Wahl von v und der ψ_ι soviel Freiheit besteht, als urch die Funktionalgleichungen

$$\gamma_1(\psi_1(v), \ldots, \psi_4(v)) = c_1, \quad \gamma_2(\psi_1(v), \ldots, \psi_4(v)) = c_2$$

ffen gelassen wird. Es darf vorausgesetzt werden, daß $\mathfrak{z}^{(0)}$ und $= v_2 = 0$ einander entsprechen. $g(\mathfrak{z})$, als Funktion auf $\mathfrak{M}$ betrachtet, erscheint dann in der Umgebung von $\mathfrak{z}^{(0)}$ ebenfalls als Funktion von v:

$$h(v) = g(\psi_1(v), \ldots, \psi_4(v)).$$

ach der Euler-Lagrangeschen Multiplikatorenregel hat nun $g(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{z}^{(0)}$, d. h. $h(v)$ in $v = (0, 0)$, dann und nur dann eine stationäre telle, wenn es ein Paar $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ reeller Größen gibt, erart, daß sich die Funktion

$$\text{2. 4)} \qquad g_\lambda(\mathfrak{z}) = g(\mathfrak{z}) + \lambda_1\gamma_1(\mathfrak{z}) + \lambda_2\gamma_2(\mathfrak{z})$$

ls Funktion der vier Veränderlichen $t_1, \ldots, t_4$ in $\mathfrak{z}^{(0)}$ stationär verält, d. h. daß ihre partiellen Ableitungen nach den vier Veränderchen in $\mathfrak{z}^{(0)}$ verschwinden:

$$\text{2. 5)} \qquad g_{\lambda t_\iota}(\mathfrak{z}^{(0)}) = 0 \qquad (\iota = 1, 2, 3, 4).$$

Um also die stationären Stellen von $g(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ zu finden, haben vir unter den (von λ abhängenden) Lösungen des Gleichungssystems 2. 5) diejenigen herauszusuchen, die Stellen auf $\mathfrak{M}$ bezeichnen, also noch den Gleichungen (2. 2) genügen.

2. 2. 2. Wir nehmen an, $\mathfrak{z}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$ sei eine solche Stelle. Für ihre weitere Untersuchung sind zunächst die Glieder 2. Ordnung n der Entwicklung von $h(v)$ bei $v = (0, 0)$ heranzuziehen. Ist der Rang der von ihnen gebildeten quadratischen Form $Q(v)$ gleich 2, o liegt (je nach ihrer Signatur) ein Maximum, ein Minimum oder ein einfacher Sattelwert vor. Es wird sich für uns nur darum handeln, mehrfache Sattelwerte auszuschließen, und daher brauchen vir nur den Rang von $Q(v)$ zu untersuchen.

Da $\gamma_1(\mathfrak{z})$ und $\gamma_2(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ konstant sind, so ist dort

$$g_\lambda(\mathfrak{z}) = g(\mathfrak{z}) + \text{const},$$

und dies gilt insbesondere für dasjenige λ, das durch die Multiplikatorenregel auf $\mathfrak{z}^{(0)}$ führt. Wir können also statt $h(v)$ auch die Funktion

$$\mathfrak{h}_\lambda(v) = g_\lambda(\psi_1(v), \ldots, \psi_4(v))$$

mit dem genannten λ untersuchen. Da nun in der Entwicklung von $\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z})$ die linearen Glieder fehlen, so erhält man die quadratische Form $\mathfrak{Q}_\lambda(v) = Q(v)$ der Glieder 2. Ordnung von $\mathfrak{h}_\lambda(v)$ allein aus den quadratischen Gliedern $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$ von $\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z})$, und zwar, indem man dort die t_ι durch die Glieder 1. Ordnung ihrer Entwicklung nach v_1, v_2 ersetzt; das sind Linearformen in v_1, v_2, die, in die Glieder 1. Ordnung der Entwicklungen von γ_1 und γ_2 eingesetzt, diese identisch verschwinden lassen, im übrigen aber, in Anbetracht der für die Wahl der v bestehenden Freiheit, willkürlich sind. D. h. die t_ι in $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$ sind den beiden linearen Gleichungen zu unterwerfen, die sich aus (2. 2) durch Nullsetzen der Glieder 1. Ordnung der Entwicklung bei $\mathfrak{z}^{(0)}$ ergeben. Die Koeffizientensysteme dieser linearen Gleichungen sind:

$$\mathfrak{u}^{(1)} = (\gamma_{1t_1}, \ldots, \gamma_{1t_4}), \quad \mathfrak{u}^{(2)} = (\gamma_{2t_1}, \ldots, \gamma_{2t_4}),$$

je für $\mathfrak{z} = (0, 0, 0, 0)$.

Mit $\mathfrak{p}_\lambda$ bezeichnen wir die Matrix der Form $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z})$, mit $\tilde{\mathfrak{t}} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ einen Zeilenvektor, mit $\mathfrak{t}$ den Spaltenvektor mit denselben Komponenten. Dann haben wir also den Rang r der quadratischen Form

$$\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z}) = \tilde{\mathfrak{t}}\,\mathfrak{p}_\lambda\,\mathfrak{t}$$

zu untersuchen, wenn sie vermöge der linearen Gleichungen

$$\mathfrak{u}^{(1)}\mathfrak{t} = 0, \quad \mathfrak{u}^{(2)}\mathfrak{t} = 0 \tag{2. 6}$$

auf eine solche von zwei Veränderlichen reduziert wird.

Wir nehmen weiterhin an, $\mathfrak{p}_\lambda$ sei vom Range 4. Wir deuten $\mathfrak{t}$ als Punktkoordinaten, die $\mathfrak{u}$ als Ebenenkoordinaten im dreidimensionalen projektiven Raum. Dann stellt $\mathfrak{P}_\lambda(\mathfrak{z}) = 0$ eine Quadrik, (2. 6) eine Gerade L dar, und r ist gleich 2, 1 oder 0, je nachdem ob L die Quadrik in zwei Punkten trifft, sie berührt oder ganz in ihr liegt. Bezeichnet L' die zu L in bezug auf $\mathfrak{P}_\lambda = 0$ konjugierte Polare, so deckt sich diese Fallunterscheidung mit der folgenden: L und L' treffen sich nicht; sie treffen sich in einem Punkt; sie fallen zusammen. Man erhält L', indem man die Pole zu den Ebenen $\mathfrak{u}^{(1)}$ und $\mathfrak{u}^{(2)}$ in bezug auf $\mathfrak{P}_\lambda = 0$ aufsucht und sie durch eine Gerade verbindet. $\mathfrak{P}_\lambda = 0$ in Ebenenkoordinaten geschrieben, lautet:

$$\mathfrak{u}\,\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}} = 0;$$

die Pole von $\mathfrak{u}^{(1)}$ und $\mathfrak{u}^{(2)}$ sind also:

$$\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}}^{(1)}, \quad \mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}}^{(2)},$$

und L', als Punktgebilde in Parameterdarstellung mit den Parametern μ_1, μ_2 geschrieben, ist:

$$\mathfrak{t} = \mu_1\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}}^{(1)} + \mu_2\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{\mathfrak{u}}^{(2)}.$$

n L' auf den Schnitt mit L hin zu untersuchen, hat man dieses t in
. 6) einzusetzen und nach der Lösbarkeit des entstandenen Gleichungs-
stems für μ_1, μ_2 zu fragen. So ergibt sich: r ist gleich dem Rang
r Matrix:

$$\text{. 7)} \qquad \begin{pmatrix} u^{(1)}\,\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{u}^{(1)} & u^{(1)}\,\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{u}^{(2)} \\ u^{(2)}\,\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{u}^{(1)} & u^{(2)}\,\mathfrak{p}_\lambda^{-1}\,\tilde{u}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

2.3. Die Maxima einer stetigen Funktion auf einer veränderlichen annigfaltigkeit. Beim Abschluß unseres Beweises werden wir ge-
sse Grenzfälle (wie z. B. den Fall $\{\mathbf{1}: 1.2\}$) ausschließen müssen.
azu dient uns der folgende

Hilfssatz. Es sei $\mathfrak{M}(p)$ eine abgeschlossene Punktmenge in dem
rtesischen Raum $\mathfrak{E}$ der Vektoren $\mathfrak{z} = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, die im Sinne der
1.4. gegebenen Definition stetig von dem Parameter p, $f(\mathfrak{z}; q)$ eine
$\mathfrak{E}$ erklärte stetige Funktion, die gleichmäßig stetig von dem Para-
eter q abhänge: p und q können dabei selbst in mehrdimensionalen
äumen variieren. $f(\mathfrak{z}; q)$ habe für jedes Parametersystem p, q auf
$\mathfrak{M}(p)$ nur eine endliche Anzahl $m^{(2)}(p, q)$ von relativen Maxima. Sind
un (p_0, q_0) ein bestimmtes Parametersystem, (p_ν, q_ν) eine beliebige
olge solcher Systeme mit $\lim (p_\nu, q_\nu) = (p_0, q_0)$, $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ Stelle eines
aximums von $f(\mathfrak{z}; q_0)$ auf $\mathfrak{M}(p_0)$, so gibt es auf jedem $\mathfrak{M}(p_\nu)$ eine
elle $\tilde{\mathfrak{z}}_\nu$, in der $f(\mathfrak{z}; q_\nu)$ ein Maximum hat, derart, daß gilt:

$$\lim \tilde{\mathfrak{z}}_\nu = \tilde{\mathfrak{z}}_0.$$

erner gilt für jedes zu (p_0, q_0) hinreichend nahe benachbarte (p, q):

$$m^{(2)}(p, q) \geqq m^{(2)}(p_0, q_0).$$

Beweis. Die zweite Behauptung ist eine Folge der ersten, denn
ach dieser gehört zu jedem Maximum $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ mindestens ein benachbartes
für $f(\mathfrak{z}; q)$ auf $\mathfrak{M}(p)$, und zu verschiedenen $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ gehören verschiedene
immer unter der Voraussetzung, daß (p, q) hinreichend nahe bei
$p_0, q_0)$ liegt.

Nun sei U eine Umgebung von $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}$ ihr Rand. Ferner sei

$$U(p) = (\mathfrak{M}(p), \mathfrak{U}), \qquad R(p) = (\mathfrak{M}(p), \mathfrak{R}).$$

ach der Erklärung von $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ ist es möglich, $\mathfrak{U}$ beliebig klein und dazu
n $\delta > 0$ so zu wählen, daß für

$$\text{2. 8)} \qquad \mathfrak{z} \in R(p_0): \quad f(\mathfrak{z}; q_0) < f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \delta$$

ilt. Liegt p hinreichend nahe bei p_0, so liegt wegen der Stetigkeit
on $\mathfrak{M}(p)$ jeder Punkt von $R(p)$ so nahe bei $R(p_0)$, daß bei beliebig
lein vorgegebenen ε gilt:

$$\max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q_0) < \max_{\mathfrak{z} \in R(p_0)} f(\mathfrak{z}; q_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner ändert sich $f(\mathfrak{z}; q)$ durch Übergang von q_0 zu einem hinreichend nahe benachbarten q so wenig, daß gilt:

$$\max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q) < \max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \max_{\mathfrak{z} \in R(p_0)} f(\mathfrak{z}; q_0) + \varepsilon. \tag{2.9}$$

Liegt p hinreichend nahe bei p_0, so gibt es andererseits, wiederum wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{M}(p)$, auf $U(p)$ einen Punkt $\tilde{\mathfrak{z}}'$, der so nahe bei $\tilde{\mathfrak{z}}_0$ liegt, daß gilt:

$$f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q_0) > f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \frac{\varepsilon}{2},$$

und beim Übergang von q_0 zu einem hinreichend nahe benachbarten q ändert sich f wieder so wenig, daß gilt:

$$f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q) > f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q_0) - \frac{\varepsilon}{2} > f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \varepsilon. \tag{2.10}$$

Setzen wir nun $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$, so ist auf $R(p)$ nach (2.8) und (2.9)

$$\max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q) < f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \frac{2}{3}\delta,$$

und nach (2.10)

$$f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q) > f(\tilde{\mathfrak{z}}_0; q_0) - \frac{\delta}{3}.$$

also

$$f(\tilde{\mathfrak{z}}'; q) > \max_{\mathfrak{z} \in R(p)} f(\mathfrak{z}; q).$$

Daher wird das Maximum von $f(\mathfrak{z}; q)$ für die abgeschlossene Punktmenge $U(p) + R(p)$ nicht auf $R(p)$ angenommen, sondern in einem innern Punkt $\tilde{\mathfrak{z}}$ von $\mathfrak{U}$; $f(\tilde{\mathfrak{z}}; q)$ ist also auch auf $\mathfrak{M}(p)$ ein relatives Maximum. Da $\mathfrak{U}$ beliebig klein sein kann, so liegt $\tilde{\mathfrak{z}}$ beliebig nahe bei $\tilde{\mathfrak{z}}_0$, w. z. b. w.

3. Die Gesamtzahl der stationären Werte von $|F(z^*)|$ innerhalb von $\mathfrak{K}_1'$. Wir nehmen nun die am Ende von **1.** angekündigte Untersuchung auf.

3. 1. Unter welchen Bedingungen ist eine bestimmte Stelle $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ auf $\mathfrak{M}(z_0)$ eine stationäre Stelle für $\Phi(\mathfrak{z}; z^*) = |F(z^*)|$, wenn $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{M}(z_0)$ variiert? Es gibt dafür zwei Möglichkeiten:

{**3**; 1'}. $\log \Phi(\mathfrak{z}) = -g(z) - g(z_0)$ (vgl. (1.9) und (2.3)) verhält sich in $\mathfrak{z}^{(0)}$ regulär und stationär.

{**3**; 2'}. Mindestens einer der Punkte $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ fällt mit z^* zusammen; dann ist $\Phi(\mathfrak{z}^{(0)}) = 0$, $\Phi(\mathfrak{z})$ hat in $\mathfrak{z}^{(0)}$ ein absolutes Minimum.

3. 2. Die stationären Stellen {**3**; 1'} ergeben sich aus der Multiplikatorenregel (vgl. **2.** 2. 1.). Es wird sich als zweckmäßig erweisen, bei ihrer Anwendung anstelle von (2.4) homogene Verbindungen de

i Funktionen zu benutzen. Wir setzen demgemäß, indem wir unter
$= (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ ein System von drei reellen, nicht zugleich ver-
windenden Größen verstehen:

$$\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z}) = \lambda_0 g(\mathfrak{z}) + \lambda_1 \gamma_1(\mathfrak{z}) + \lambda_2 \gamma_2(\mathfrak{z}).$$

der Bezeichnung

1) $$\mathfrak{g}_\lambda(z) = \lambda_0 g(z) + \lambda_1 \gamma_1(z) + \lambda_2 \gamma_2(z)$$

mit Rücksicht auf die Erklärungen (2. 1) und (2. 3) von $g(\mathfrak{z})$ und
$\mathfrak{z}$):

$$\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z}) = \mathfrak{g}_\lambda(z_1) + \mathfrak{g}_\lambda(z_2).$$

zen wir ferner:

$= x + iy$; $z_\iota = x_\iota + iy_\iota$ $(\iota = 1, 2)$; $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$,

ergibt die Multiplikatorenregel: Notwendig für das Vorliegen einer
tionären Stelle im Sinne von $\{3; 1'\}$ ist:

$$\mathfrak{g}_{\lambda x}(z_1^{(0)}) = \mathfrak{g}_{\lambda y}(z_1^{(0)}) = \mathfrak{g}_{\lambda x}(z_2^{(0)}) = \mathfrak{g}_{\lambda y}(z_2^{(0)}) = 0$$

ein gewisses λ, und außerdem, daß $\mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ auf $\mathfrak{M}$ liegt.
n. den Periodenbedingungen (1. 1) genügt. Zusammen mit $\lambda_0 \neq 0$
d diese Bedingungen hinreichend.

Eine Stelle $z = \zeta$ mit $\mathfrak{g}_{\lambda x}(\zeta) = \mathfrak{g}_{\lambda y}(\zeta) = 0$ heißt eine kritische
lle für $\mathfrak{g}_\lambda(z)$; diese Stellen sind identisch mit den Nullstellen von
(z). Wir haben also diejenigen Paare $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ aufzusuchen, die Null-
llen einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ mit $\lambda_0 \neq 0$ für dasselbe λ sind, und unter
esen wiederum diejenigen, die Stellen auf $\mathfrak{M}$ bezeichnen, also den
riodenbedingungen genügen.

3. 3. Bei $\lambda_0 \neq 0$ hat $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ nach dem in 1. 2. angeführten Hilfssatz
gl. Anmerkung [4])) zwei Nullstellen, falls die auf dem Rande mit
m Gewicht $^1/_2$ mitgezählt werden. Bei $\lambda_0 = 0$ gibt es bei derselben
rabredung eine; doch darf z^* als die zweite gelten, insofern, als
i $\lambda_0 > 0$ und festen λ_1, λ_2 mindestens eine Nullstelle von $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ gegen
konvergiert. Um das einzusehen, denken wir uns um z^* einen ganz
$\mathfrak{B}$ gehörigen Kreis K beschrieben, auf dessen Rand keine Null-
lle von $\lambda_1 \Gamma'_1 + \lambda_2 \Gamma'_2$ liegt; das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mathfrak{G}''_\lambda(z)}{\mathfrak{G}'_\lambda(z)} dz$$

gleich der Anzahl der Nullstellen weniger Anzahl der Pole von
in seinem Inneren (falls keine solche Stelle auf K selbst liegt,
ne Voraussetzung, die für $\lambda_0 = 0$ und also auch für alle absolut
nreichend kleinen λ_0 erfüllt ist). Bei $\lambda_0 = 0$ ist das Integral nicht
gativ, da dann $\mathfrak{G}'_\lambda$ im Innern von K regulär ist. Es hängt ferner
der Umgebung von $\lambda_0 = 0$ stetig von λ_0 ab und ist stets ganz-
hlig, hat also für jedes absolut hinreichend kleine λ_0 denselben Wert.

wie für $\lambda_0 = 0$; da für $\lambda_0 \neq 0$ $\mathfrak{G}'_\lambda$ den Pol z^* im Innern von K ha so liegt dort bei absolut hinreichend kleinem $\lambda_0 \neq 0$ auch mindeste eine Nullstelle, und das gilt bei beliebig kleinem Radius von K. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wie wir ferner in **1.** 2 gesehen haben, liegt bei $\lambda_0 = 0$ die wirk liche Nullstelle von $\mathfrak{G}'_\lambda$ auf $\mathfrak{S}$, und jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ ist bei geeig neter Wahl von λ_1, λ_2 als Nullstelle möglich.

3. 4. Damit läßt sich nun auch die Heranziehung der homogene Linearverbindungen (3. 1) rechtfertigen, d. h. die Ausnahmestellun die $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit $\lambda_0 = 0$ bei der Anwendung der Multiplikatorenregel hatt im wesentlichen beseitigen. Wenn nämlich die Punkte $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ in „Nullstellen" von $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit $\lambda_0 = 0$ in dem hier gebrauchten e weiterten Wortsinne fallen, so deckt sich entweder mindestens ein von ihnen mit z^*, oder beide fallen in die wirkliche Nullstelle v $\mathfrak{G}'_\lambda$, also in ein und denselben Punkt von $\mathfrak{S}$. Falls $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ eine Punkt von $\mathfrak{M}$ bezeichnet, so liegt im ersten Falle eine stationäre Stell nach $\{\mathbf{3}; 2'\}$ vor, während der zweite nur in dem ausgeschlossene Grenzfall $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ auftreten kann (vgl. **1.** 3). Also können wir sage

Eine Stelle $\mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ auf $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann stationä für $\Phi(\mathfrak{z}; z^*)$, wenn entweder

$\{\mathbf{3}; 1\}$. $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ Nullstellen (im erweiterten Sinne) einer Funktio $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ sind, oder

$\{\mathbf{3}; 2\}$. mindestens einer der Punkte $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ nach z^* fällt. Die beiden Fälle schließen sich nicht gegenseitig aus.

Es sind nun weiterhin zwei Unterfälle von $\{\mathbf{3}; 1\}$ zu unterscheide

$\{\mathbf{3}; 1_1\}$. $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ fallen in dieselbe Nullstelle einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z$

$\{\mathbf{3}; 1_2\}$. Das Paar $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$ ist identisch mit dem Nullstellenpa $\xi_\lambda^{(1)}$, $\xi_\lambda^{(2)}$ einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$.

Die drei Fälle $\{\mathbf{3}; 1_1\}$, $\{\mathbf{3}; 1_2\}$, $\{\mathbf{3}; 2\}$ schließen sich nicht gege seitig aus, es gibt vielmehr die folgenden Grenzfälle, die zugleich zwei oder drei der aufgezählten Fälle gehören, was in leicht ersich licher Weise durch ihre Bezeichnung kenntlich gemacht wird:

$\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$. $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ fallen zusammen in eine doppelte Nullstell einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$.

$\{\mathbf{3}; 1_1, 2\}$. $z_1^{(0)} = z_2^{(0)} = z^*$, d. h., z^* muß in eine Symmetriestel von $\mathfrak{M}$ fallen, und dies ist, wie wir sehen werden (**3.** 5. 1.) auch hi reichend.

$\{\mathbf{3}; 1_2, 2\}$. Es muß sich um ein Nullstellenpaar einer Funktio $\mathfrak{G}'_\lambda$ handeln ($\{\mathbf{3}; 1_2\}$), von dem mindestens eine Stelle nach z^* fäl ($\{\mathbf{3}; 2\}$); letzteres trifft nur bei $\lambda_0 = 0$ zu, und dann liegt die ande Nullstelle auf $\mathfrak{S}$. Aus der Forderung, daß das Paar eine Stelle a $\mathfrak{M}$ bezeichne, folgt dann nach **1.** 3., daß z^* auf dem Rande von $\mathfrak{A}$ liegen muß. Ist umgekehrt dieses der Fall, so liegt diejenige Stell die z^* zu einem Element von $\mathfrak{M}$ ergänzt, auf $\mathfrak{S}$, ist also wirklic

ullstelle einer Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit $\lambda_0 = 0$, deren andre „Nullstelle“ z^* . Dieser Grenzfall tritt also dann und nur dann auf, wenn z^* auf m Rande von $\mathfrak{M}'$ liegt.

$\{\mathbf{3}; 1_{1,2}, 2\}$. $z_1^{(0)}$ und $z_2^{(0)}$ fallen beide zusammen nach $z^* \in \mathfrak{S}$; eine elle von $\mathfrak{M}$ kann dabei nach **1.** 3. nur vorliegen, wenn es sich um e Symmetriestelle des vorerst ausgeschlossenen Grenzfalls $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ ndelt.

3. 5. 1. Wir fahren nun in der Untersuchung der Nullstellen der unktionen $\mathfrak{G}'_\lambda(z)$ fort, von denen uns nur die im Innern von $\mathfrak{B}$ egenden interessieren. Jede gebietsinnere Stelle $\zeta \neq z^*$ ist wirkliche ullstelle einer passenden Funktion $\mathfrak{G}'_\lambda$, oder, damit gleichbedeutend, itische Stelle einer Funktion $\mathfrak{g}_\lambda$. Denn $\mathfrak{g}_{\lambda x}(\zeta) = 0$, $\mathfrak{g}_{\lambda y}(\zeta) = 0$ sind vei lineare homogene Gleichungen für die drei Unbekannten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, e stets eine von $0, 0, 0$ verschiedene Lösung zulassen; $\zeta = z^*$ ist ullstelle in dem gemäß **3.** 3 erweiterten Wortsinn für jedes $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit $= 0$. Daher ist jede Symmetriestelle von $\mathfrak{M}$ eine unter $\{\mathbf{3}; 1_1\}$ llende stationäre Stelle.

3. 5. 2. Für die Untersuchung des Falles $\{\mathbf{3}; 1_2\}$ müssen wir die nigen λ aufsuchen, zu denen Funktionen $\mathfrak{G}'_\lambda$ mit einem Paar geetsinnerer Nullstellen gehören. Die Menge dieser λ heiße $\mathfrak{D}$, ihre omplementärmenge $\mathfrak{C}$; diese fassen wir zuerst ins Auge. Wenn $\in \mathfrak{C}$, so liegt also mindestens eine Nullstelle von $\mathfrak{G}'_\lambda$ auf C. Die orderung, daß ein vorgegebener Randpunkt ζ kritische Stelle einer unktion $\mathfrak{g}_\lambda$ sei, führt nur auf eine lineare Gleichung für λ, nämlich uf

$$\mathfrak{g}_{\lambda n}(\zeta) = \lambda_0 g_n(\zeta) + \lambda_1 \gamma_{1n}(\zeta) + \lambda_2 \gamma_{2n}(\zeta) = 0 \tag{3. 2}$$

wo der Index n die Ableitung nach der Randnormalen bedeutet), da a in jedem Randpunkt $\mathfrak{g}_{\lambda s}(\zeta) = 0$ gilt. Wir deuten nun λ als einen unkt einer projektiven Ebene (hier kommt der Vorteil der homoenen Verbindungen (3. 1) zur Geltung). Dann wird durch (3. 2) ine Gerade dargestellt. Jedem Randpunkt ζ ist also eine Gerade (\zeta) der λ-Ebene zugeordnet, derart, daß ζ Nullstelle aller derjenigen $\mathfrak{G}'_\lambda$ ist, deren λ auf dieser Geraden liegt. $\mathfrak{C}$ ist die Menge der von en Geraden $L(\zeta)$ überdeckten λ, wenn ζ C durchläuft; mit $\mathfrak{C}_\iota$ beeichnen wir die Menge, die von den zu C_ι gehörigen Geraden übereckt wird.

Da $\mathfrak{G}'_\lambda$ nach dem schon wiederholt herangezogenen Hilfssatz höchtens vier Nullstellen auf dem Rande, auf jeder Komponente desselben ber eine gerade Anzahl hat, so können für ein bestimmtes λ nicht uf allen drei Randkomponenten solche liegen, d. h. kein Punkt der -Ebene gehört allen drei $\mathfrak{C}_\iota$ zugleich an.

Durch die Schnittpunkte der $L(\zeta_\iota)$ mit einer beliebigen Geraden wird, wenn $\zeta_\iota C_\iota$ durchläuft, dieses eindeutig und im Sinne der proektiven Geometrie stetig auf L abgebildet; daher ist der Durchschnitt

von L mit $\mathfrak{C}_\iota$ zusammenhängend. Wählt man für L die Verbindungsgerade zweier Punkte aus $\mathfrak{C}_\iota$, so sieht man, daß dieses projektiv-konvex ist, d. h., daß mindestens eine der beiden Verbindungsstrecken irgend zweier seiner Punkte ganz zu $\mathfrak{C}_\iota$ gehört.

Es seien die Punkte $\zeta_\iota \in C_\iota$ $(\iota = 0, 1, 2)$ beliebig gewählt; durch die drei Geraden $L(\zeta_\iota)$ wird die λ-Ebene in vier Dreiecke $\mathfrak{D}_0', \mathfrak{D}_1', \mathfrak{D}_2', \mathfrak{D}_3'$ zerlegt. Keines dieser Gebiete kann von den drei $\mathfrak{C}_\iota$ zusammen völlig überdeckt werden, da es sonst einen Punkt gäbe, der allen drei $\mathfrak{C}_\iota$ zugleich angehört. Also besteht $\mathfrak{D}$ aus vier Teilgebieten $\mathfrak{D}_\iota$ $(\iota = 0, 1, 2, 3)$, deren jedes der Durchschnitt von Dreiecken $\mathfrak{D}_\iota'$ bei veränderlichem ζ_ι, und also projektiv konvex ist.

Die wesentliche Eigenschaft der $\mathfrak{D}_\iota$ ist nun diese: Jedes wird von drei Bogen berandet, je einem zu $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ gehörigen. Andernfalls gäbe es am Rande eines der $\mathfrak{D}_\iota$, etwa dem von $\mathfrak{D}_0$, zwei Punkte, die zu denselben zwei $\mathfrak{C}_\iota$, sagen wir zu $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$, gehören. Von ihren Verbindungsstrecken läge eine in $\mathfrak{D}_0$, die andere zugleich in $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$; diese müßte aber außerdem $\mathfrak{C}_2$ treffen, im Widerspruch zu einer oben gemachten Feststellung.

3. 6. Zu jedem inneren Punkt λ von $\mathfrak{D}$ gehört eine Funktion $\mathfrak{G}$ mit zwei dem Inneren von $\mathfrak{B}$ angehörigen Nullstellen $\xi_\lambda^{(1)}$, $\xi_\lambda^{(2)}$, die auch zusammenfallen können. Zur Auffindung der unter $\{3; 1_2\}$ fallenden stationären Stellen haben wir unter diesen Nullstellenpaaren diejenigen herauszusuchen, die Stellen auf $\mathfrak{M}$ bezeichnen, also diejenigen, für die der Vektor

$$\tau = \gamma(\xi_\lambda^{(1)}) + \gamma(\xi_\lambda^{(2)}) \tag{3. 3.}$$

in der Periodenebene den durch die Periodenbedingungen (1. 1) vorgeschriebenen Punkt

$$\alpha_0^{(2)} = \alpha - \gamma(z_0)$$

bezeichnet. Durch (3. 3) wird eine Abbildung von $\mathfrak{D}$ in die Periodenebene vermittelt:

$$\tau = \gamma(\xi_\lambda^{(1)}) + \gamma(\xi_\lambda^{(2)}) = \vartheta(\lambda), \quad \lambda \in \mathfrak{D}; \qquad \vartheta(\lambda) = (\vartheta_1(\lambda), \vartheta_2(\lambda)), \tag{3. 4}$$

und die Urbilder von $\alpha_0^{(2)}$ bei dieser Abbildung sind diejenigen λ, die auf stationäre Stellen $\{3; 1_2\}$ auf $\mathfrak{M}$ führen; wir haben also die Anzahl dieser Urbilder zu bestimmen.

3. 6. 1. Wir beweisen zuerst, daß die Abbildung (3. 4) im kleinen umkehrbar eindeutig ist, indem wir zeigen, daß die Funktionalmatrix

$$\Theta = \begin{pmatrix} \vartheta_{1\lambda_0} & \vartheta_{1\lambda_1} & \vartheta_{1\lambda_2} \\ \vartheta_{2\lambda_0} & \vartheta_{2\lambda_1} & \vartheta_{2\lambda_2} \end{pmatrix} \tag{3. 5}$$

vom Range 2 ist. Zu diesem Zwecke leiten wir zunächst eine analytische Darstellung unserer Abbildung her.

Es ist

$$\vartheta_\iota(\lambda) = \Re \Theta_\iota(\lambda) \text{ mit } \Theta_\iota(\lambda) = \Gamma_\iota(\xi_\lambda^{(1)}) + \Gamma_\iota(\xi_\lambda^{(2)}) \qquad (\iota = 1, 2).$$

ese Summe der Werte der Funktion Γ_ι in den Nullstellen $\mathfrak{G}'_\lambda$ läßt
h als ein über C erstrecktes Residuenintegral darstellen. Wegen
r Vieldeutigkeit von Γ_ι in $\mathfrak{B}$ müssen wir durch zwei passende
hlitze B_1 und B_2 erst ein einfach zusammenhängendes Gebiet her-
ellen. B_1 soll etwa C_1, B_2 C_2 mit C_0 verbinden, und zwar unter Ver-
eidung der Punkte z^*, $\zeta_\lambda^{(1)}$ und $\zeta_\lambda^{(2)}$, wobei wir uns zunächst ein be-
immtes λ gewählt denken. Den Rand des so entstandenen Gebietes
nennen wir C'. Nun betrachten wir das Integral:

$$I_\iota = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \Gamma_\iota(z)\,\frac{\mathfrak{G}''_\lambda(z)}{\mathfrak{G}'_\lambda(z)}\,dz = \Gamma_\iota(\zeta_\lambda^{(1)}) + \Gamma_\iota(\zeta_\lambda^{(2)}) - \Gamma_\iota(z^*).$$

ie angegebene Auswertung bleibt auch für $\lambda_0 = 0$ richtig, da dann
ne der Stellen $\zeta_\lambda^{(\nu)}$ nach z^* fällt. Wir formen I_ι durch partielle Inte-
ation um:

$$(3.6)\qquad I_\iota = \Big[\frac{1}{2\pi i}\,\Gamma_\iota(z)\,\log\mathfrak{G}'_\lambda(z)\Big]_{C'} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \Gamma'_\iota(z)\,\log\mathfrak{G}'_\lambda(z)\,dz.$$

ir betrachten nun λ als veränderlich, fassen aber zunächst nur solche
nderungen ins Auge, bei denen $\zeta_\lambda^{(1)}$ und $\zeta_\lambda^{(2)}$ nicht allein im Innern
n $\mathfrak{B}$ bleiben, sondern auch die Schlitze B_1 und B_2 nicht überschreiten.
eim Umlauf um C' kehrt Γ_ι zum Ausgangswert zurück; dasselbe
lt für $\mathfrak{G}'_\lambda$; die Änderung von $\log\mathfrak{G}'_\lambda$ ist also ein ganzzahliges Viel-
ches von $2\pi i$, das stetig, also gar nicht, von λ abhängt, und das-
lbe gilt daher von dem ausintegrierten Bestandteil in (3. 6). Ferner
immen die beiden Werte von Γ'_ι an zwei gegenüberliegenden Punkten
r beiden Ufer eines Schlitzes B_1 oder B_2 überein, während sich die
n $\log\mathfrak{G}'_\lambda$ um eine von λ unabhängige Größe unterscheiden, sodaß
lso die Beiträge, die die beiden Schlitze zu dem Integral in (3. 6)
efern, ebenfalls von λ unabhängig sind. Die übrigen Bestandteile
es Integrals unterscheiden sich von dem über C erstreckten wieder
m einen von λ unabhängigen Wert. Indem wir nun alle von λ un-
bhängigen Teile zusammenfassend mit A' bezeichnen, finden wir
chließlich:

$$(3.7)\qquad \Gamma_\iota(\zeta_\lambda^{(1)}) + \Gamma_\iota(\zeta_\lambda^{(2)}) = A' - \frac{1}{2\pi i}\int_C \Gamma'_\iota(z)\,\log\mathfrak{G}'_\lambda(z)\,dz,$$

obei die zweite Einschränkung über die Veränderlichkeit von λ nach-
äglich aufgehoben werden kann, da es sich ja um analytische Ab-
ängigkeiten handelt. Durch weitere Umformungen des Integrals
nden wir, indem wir mit A eine neue von λ unabhängige Größe be-
eichnen:

$$\Gamma_\iota(\zeta_\lambda^{(1)}) + \Gamma_\iota(\zeta_\lambda^{(2)}) = A'_\iota - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\partial\Gamma_\iota}{\partial s}\log\Big(\frac{\partial\mathfrak{G}_\lambda}{\partial s} : \frac{\partial z}{\partial s}\Big)\,ds$$

$$= A_\iota - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\partial\Gamma_\iota}{\partial s}\log\frac{\partial\mathfrak{G}_\lambda}{\partial s}\,ds.$$

Auf C sind aber $\frac{\partial \Gamma_\iota}{\partial s} = -i \frac{\partial \gamma_\iota}{\partial n}$ und $\frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda}{\partial s} = -i \frac{\partial g_\lambda}{\partial n}$ rein imaginär, log $\frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda}{\partial s}$ also, abgesehen von einer von λ unabhängigen Größe, rein reell, und dasselbe gilt von dem Integralglied in der letzten Gleichung. Daher kann die Abbildung $\tau_\iota = \vartheta_\iota(\lambda)$ $(\iota = 1, 2)$ in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\tau_\iota = \vartheta_\iota(\lambda) = a_\iota - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\partial \Gamma_\iota}{\partial s} \log \frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda}{\partial s} \, ds$$

mit von λ unabhängigen a_ι. Daraus findet man z. B. für $\vartheta_{\iota \lambda_0}$, eine der Elemente der zu untersuchenden Matrix (3.5):

$$\vartheta_{\iota \lambda_0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\partial \Gamma_\iota}{\partial s} \frac{\frac{\partial G}{\partial s}}{\frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda}{\partial s}} ds = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma_\iota' G'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz,$$

und für die Matrix Θ selbst:

$$(3.8) \qquad -2\pi i \Theta = \begin{pmatrix} \int_C \frac{\Gamma_1' G'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz & \int_C \frac{\Gamma_1'^2}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz & \int_C \frac{\Gamma_1' \Gamma_2'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz \\ \int_C \frac{\Gamma_2' G'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz & \int_C \frac{\Gamma_1' \Gamma_2'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz & \int_C \frac{\Gamma_2'^2}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz \end{pmatrix}.$$

Wäre ihr Rang kleiner als 2, so gäbe es eine lineare Verbindung ihrer beiden Zeilen mit nicht zugleich verschwindenden reellen Koeffizienten, deren drei Glieder verschwinden, also eine Funktion

$$\Gamma' = \mu_1 \Gamma_1' + \mu_2 \Gamma_2' \quad \text{mit} \quad (\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0),$$

für die gilt:

$$(3.9) \qquad \int_C \frac{\Gamma' G'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz = \int_C \frac{\Gamma' \Gamma_1'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz = \int_C \frac{\Gamma' \Gamma_2'}{\mathfrak{G}_\lambda'} dz = 0.$$

Für die weitere Untersuchung sind nun vier Fälle zu unterscheiden:

a) $\lambda_0 \neq 0$, $\xi_\lambda^{(1)} \neq \xi_\lambda^{(2)}$; b) $\lambda_0 \neq 0$, $\xi_\lambda^{(1)} = \xi_\lambda^{(2)}$;
c) $\lambda_0 = 0$, $\xi_\lambda^{(1)} \neq \xi_\lambda^{(2)} = z^*$; d) $\lambda_0 = 0$, $\xi_\lambda^{(1)} = \xi_\lambda^{(2)} = z^*$.

a) Auswertung der beiden letzten Integrale ergibt:

$$\frac{\Gamma' \Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(\xi_\lambda^{(1)}) + \frac{\Gamma' \Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(\xi_\lambda^{(2)}) = 0 \qquad (\iota = 1, 2)$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem für $\Gamma'(\xi_\lambda^{(1)})$ und $\Gamma'(\xi_\lambda^{(2)})$. Da Γ' nur eine Nullstelle hat, so müßte seine Determinante verschwinden, es müßte also gelten:

$$\frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}(\xi_\lambda^{(1)}) = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}(\xi_\lambda^{(2)}),$$

und das widerspricht der in 1.2. festgestellten Schlichtheit der Funktion $\Psi = \frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}$.

b) Ebenso wie unter a) erhält man:

$$\frac{\Gamma'\Gamma_\iota''}{\mathfrak{G}_\lambda'''}(\xi_\lambda^{(1)}) + \frac{\Gamma''\Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda'''}(\xi_\lambda^{(1)}) = 0 \qquad (\iota = 1,2).$$

a $\xi_\lambda^{(1)}$ nicht doppelte Nullstelle von Γ' sein kann, so müßte die Deterinante dieses Gleichungssystems für $\Gamma'(\xi_\lambda^{(1)})$, $\Gamma''(\xi_\lambda^{(1)})$ verschwinden. ei $\Gamma_1'(\xi_\lambda^{(1)}) \neq 0$ würde daraus folgen:

$$\frac{\Gamma_1'\Gamma_2'' - \Gamma_1''\Gamma_2'}{\Gamma_1'^2}(\xi_\lambda^{(1)}) = \left(\frac{\Gamma_2'}{\Gamma_1'}\right)'(\xi_\lambda^{(1)}) = 0,$$

n Widerspruch mit der Schlichtheit von Ψ. Bei $\Gamma_1'(\xi_\lambda^{(1)}) = 0$ aber ürde entweder $\Gamma_1''(\xi_\lambda^{(1)}) = 0$ oder $\Gamma_2''(\xi_\lambda^{(1)}) = 0$ folgen, d. h. $\xi_\lambda^{(1)}$ wäre ntweder doppelte Nullstelle von Γ_1' oder zugleich Nullstelle von Γ_1' nd Γ_2', was beides unmöglich ist.

c) Man erhielte durch Auswerten der drei Integrale (3.9):

$$\frac{\Gamma' G'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(\xi_\lambda^{(1)}) - \frac{\Gamma'}{\mathfrak{G}_\lambda'}(z^*) = 0, \quad \frac{\Gamma'\Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(\xi_\lambda^{(1)}) = 0 \qquad (\iota = 1,2).$$

)a nicht zugleich Γ_1' und Γ_2' in $\xi_\lambda^{(1)}$ verschwinden können, so würde us den beiden letzten Gleichungen $\Gamma'(\xi_\lambda^{(1)}) = 0$, und dann aus der rsten $\Gamma'(z^*) = 0$ folgen, Γ' hätte also zwei Nullstellen.

d) Man bekäme:

$$-\frac{\Gamma'''(z^*)}{\mathfrak{G}_\lambda''(z^*)} + \frac{c\,\Gamma'(z^*)}{\mathfrak{G}_\lambda''(z^*)} = 0, \quad \frac{\Gamma'\Gamma_\iota'}{\mathfrak{G}_\lambda''}(z^*) = 0 \qquad (\iota = 1,2),$$

vo c eine gewisse Konstante bezeichnet, woraus $\Gamma'(z^*) = \Gamma''(z^*) = 0$ olgen würde.

3.6.2. Um unsere Abbildung (3.4) im großen zu überblicken, untersuchen wir die Bilder der Ränder der $\mathfrak{D}_\iota$. Wenn λ aus dem Innern von $\mathfrak{D}_\iota$ auf den zu $\mathfrak{C}_0$ gehörigen Randbogen $\mathfrak{C}_{0\iota}$ tritt, so tritt mindestens eine der beiden Nullstellen von $\mathfrak{G}_\lambda'$ aus dem Innern von $\mathfrak{B}$ auf die Randkomponente C_0. Dort ist $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, während in der andern Nullstelle gilt: $\gamma_1 \geqq 0$, $\gamma_2 \geqq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi - \gamma_0 \leqq 2\pi$. Liegt ferner λ auf dem zu $\mathfrak{C}_1$ gehörigen Endpunkt von $\mathfrak{C}_{0\iota}$, so gilt: $\xi_\lambda^{(1)} \in C_0$, $\xi_\lambda^{(2)} \in C_1$ oder umgekehrt, also:

$$\tau_1 = \gamma_1(\xi_\lambda^{(1)}) + \gamma_1(\xi_\lambda^{(2)}) = 2\pi, \quad \tau_2 = \gamma_2(\xi_\lambda^{(1)}) + \gamma_2(\xi_\lambda^{(2)}) = 0.$$

Durch weitere entsprechende Überlegungen findet man die in der folgenden Tabelle niedergelegten Zuordnungen (vgl. Fig. 4). Das Bild des Randes von $\mathfrak{D}_\iota$ hat also um jeden Punkt des Kurvendreiecks $\Delta^{(0)}$, in dessen Innerem der vorgeschriebene Bildpunkt $\alpha_0^{(2)}$ liegen muß (vgl. **1.**3.), die Umlaufszahl ± 1. Daraus folgt zusammen mit dem Ergebnis von **3.**6.1., daß jeder Punkt von $\Delta^{(0)}$, insbesondere also $\alpha_0^{(2)}$, von dem Bilde von $\mathfrak{D}_\iota$ genau einmal bedeckt wird. Zu jedem $\mathfrak{D}_\iota$ gehören also im allgemeinen zwei stationäre Stellen, nämlich, wenn $\xi_\lambda^{(1)}$ und $\xi_\lambda^{(2)}$ die Nullstellen der Funktion $\mathfrak{G}_\lambda'$ sind, deren λ das in $\mathfrak{D}_\iota$ liegende Ur-

bild von $\alpha_0^{(2)}$ ist: $z_1 = \xi_\lambda^{(1)}$, $z_2 = \xi_\lambda^{(2)}$; $z_1 = \xi_\lambda^{(2)}$, $z_2 = \xi_\lambda^{(1)}$. Eine Aus-
nahme liegt vor, wenn $\xi_\lambda^{(1)} = \xi_\lambda^{(2)}$ ist. Zu verschiedenen $\mathfrak{D}_t$ gehöre-

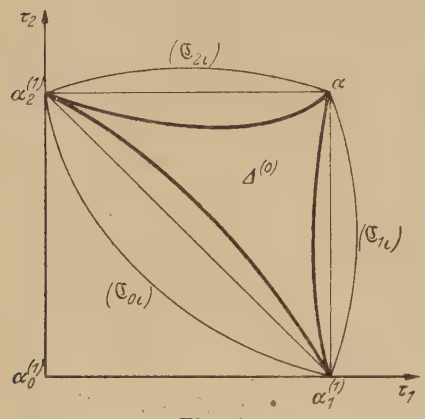

Fig. 4.

	τ_1	τ_2	$\tau_1 + \tau_2$
$\lambda \in \mathfrak{C}_{0t}$	$\geqq 0$	$\geqq 0$	$\leqq 2\pi$
$(\mathfrak{C}_{0t}, \mathfrak{C}_{1t})$	2π	0	
$\mathfrak{C}_{1t}$	$\geqq 2\pi$	$[0, 2\pi]$	
$(\mathfrak{C}_{1t}, \mathfrak{C}_{2t})$	2π	2π	
$\mathfrak{C}_{2t}$	$[0, 2\pi]$	$\geqq 2\pi$	
$(\mathfrak{C}_{2t}, \mathfrak{C}_{0t})$	0	2π	

verschiedene stationäre Stellen. Sind nämlich allgemein λ' und λ
zwei verschiedene Punkte der λ-Ebene, so sind die zu $\mathfrak{G}'_{\lambda'}$ und $\mathfrak{G}'_{\lambda''}$ ge-
hörigen Nullstellenpaare verschieden, da sonst zu jedem λ auf der
Verbindungsgeraden von λ' und λ'' dasselbe Nullstellenpaar gehören
würde; das ist nicht möglich, da diese Gerade jedes der $\mathfrak{C}_t$ trifft, eine
der zugehörigen Nullstellen also auf jedes der C_t zu liegen kommt.

3. 7. 1. In der KRONECKERschen Formel ist jeder Sattelpunkt mit
seiner Vielfachheit zu zählen. Daher müssen wir diese jeweils fest-
stellen, also nach **2.** 2. 2. vor allen Dingen die Frage klären, welches
in der Entwicklung von $g_\lambda(\mathfrak{z})$ nach Ortsparametern auf $\mathfrak{M}$ der Rang
der quadratischen Form der Glieder zweiter Ordnung ist.

$\mathfrak{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$ sei eine stationäre Stelle der Art $\{\mathbf{3}.\, 1_2\}$ mit $z_1^{(0)} \neq z_2^{(0)}$.
Es ist für die Rechnung bequemer, ihre vierdimensionale Umgebung
anstatt durch reelle Parameter, etwa Real- und Imaginärteil von $z_1 - z_1^{(0)}$
und $z_2 - z_2^{(0)}$, durch diese beiden komplexen Größen und ihre Konju-
gierten zu beschreiben, die dabei wie vier unabhängige Veränderliche
zu behandeln sind[7]). Es ist

[7]) Die Einführung konjugiert komplexer an Stelle reeller Parameter und ihre
Behandlung als unabhängige Veränderliche wird durch folgende Überlegung
gerechtfertigt: $g_\lambda(\mathfrak{z})$, $\gamma_1(\mathfrak{z})$, $\gamma_2(\mathfrak{z})$ sind analytische Funktionen der vier reellen
Veränderlichen t_ι $(\iota = 1, 2, 3, 4)$ in der Umgebung von $\mathfrak{z}^{(0)}$, also auch, vermöge
der Potenzreihenentwicklung, für komplexe Werte derselben erklärt. Für die
Berechnung des Ranges der Matrix (2.7) macht es keinen Unterschied, ob für die
t_ι nur eine reelle oder eine komplexe Umgebung von $\mathfrak{z}^{(0)}$ zugelassen wird. Durch
eine komplexe Substitution mit nicht verschwindender Determinante können nun
neue komplexe voneinander unabhängige Veränderliche eingeführt werden; so
insbesondere: $u_1 = t_1 + it_2$; $u_2 = t_1 - it_2$, $u_3 = t_3 + it_4$, $u_4 = t_3 - it_4$. Für reelle
Werte der t_ι ist $u_2 = \bar{u}_1$, $u_4 = \bar{u}_3$.

$$2\,\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{z}) = \mathfrak{G}_\lambda(z_1) + \overline{\mathfrak{G}_\lambda(z_1)} + \mathfrak{G}_\lambda(z_2) + \overline{\mathfrak{G}_\lambda(z_2)}$$
$$2\,\gamma_\iota(\mathfrak{z}) = \Gamma_\iota(z_1) + \overline{\Gamma_\iota(z_1)} + \Gamma_\iota(z_2) + \overline{\Gamma_\iota(z_2)} \qquad (\iota = 1,2),$$

nd für die Matrix $\mathfrak{p}_\lambda$ aus **2.2** erhält man:

$$2\,\mathfrak{p}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}''_\lambda(z_1^{(0)}) & & & \\ & \overline{\mathfrak{G}''_\lambda(z_1^{(0)})} & & \\ & & \mathfrak{G}''_\lambda(z_2^{(0)}) & \\ & & & \overline{\mathfrak{G}''_\lambda(z_2^{(0)})} \end{pmatrix}.$$

o außerhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen stehen. Sie ist, wie ort vorausgesetzt, vom Range 4, da wegen $z_1^{(0)} \neq z_2^{(0)}$ diese beiden tellen einfache Nullstellen von $\mathfrak{G}'_\lambda$ sind. Ferner ist

$$2\,\mathfrak{u}^{(\iota)} = (\Gamma'_\iota(z_1^{(0)}),\ \overline{\Gamma'_\iota(z_1^{(0)})},\ \Gamma'_\iota(z_2^{(0)}),\ \overline{\Gamma'_\iota(z_2^{(0)})}),$$

nd die Matrix (2.7), auf deren Rang es schließlich ankommt, ist die it den Gliedern:

$$\frac{1}{8}\,\mathfrak{Re}\left(\frac{\Gamma'_\iota\Gamma'_\varkappa}{\mathfrak{G}''_\lambda}(z_1^{(0)}) + \frac{\Gamma'_\iota\Gamma'_\varkappa}{\mathfrak{G}''_\lambda}(z_2^{(0)})\right) \qquad (\iota, \varkappa = 1,2).$$

ie Größen, deren Realteile hier zu nehmen sind, stimmen mit den urch $-2\pi i$ dividierten Integralen in den beiden letzten Spalten der latrix (3.8) überein, von denen wir dort gesehen haben, daß sie selbst eell sind und bei $\lambda_0 \neq 0$ eine Matrix vom Range 2 bilden (Fall a) er dortigen Unterscheidung). Der Fall $\lambda_0 = 0$ führt aber, wie in **3.4.** ezeigt, auf ein absolutes Minimum. Damit ist gezeigt, daß die nicht n einen Symmetriepunkt von $\mathfrak{M}$ fallenden Sattelpunkte alle einfach u zählen sind.

3.7.2. Wir zeigen schließlich, daß ein Symmetriepunkt, der ja stets ine stationäre Stelle für $\Phi(\mathfrak{z})$ ist (vgl. **3.5.1.**), von gewissen Ausahmen möglicherweise abgesehen, immer ein einfacher Sattelpunkt ist. s sei $\mathfrak{z}^{(0)} = (z^{(0)}, z^{(0)})$ eine Symmetriestelle von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{z} = (z_1, z_2)$ ariiere in ihrer Umgebung auf $\mathfrak{M}$. Setzen wir

$$z_1 - z^{(0)} = \delta z_1, \quad z_2 - z^{(0)} = \delta z_2,$$

o haben wir die quadratische Form

3.10) $$\mathfrak{G}''_\lambda(z^{(0)})\,(\delta z_1^2 + \delta z_2^2) + \overline{\mathfrak{G}''_\lambda(z^{(0)})}\,(\delta z_1^2 + \delta z_2^2)$$

u untersuchen, wobei $\delta z_1, \delta z_2, \delta z_1, \delta z_2$ durch die Forderung, daß $z_1, z_2)$ auf $\mathfrak{M}$ liege, an die Bedingungen geknüpft sind:

$$\Gamma'_\iota(z^{(0)})\,(\delta z_1 + \delta z_2) + \overline{\Gamma'_\iota(z^{(0)})}\,(\overline{\delta z_1} + \overline{\delta z_2}) = 0 \qquad (\iota = 1,2).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems für $(\delta z_1 + \delta z_2)$ und $(\delta z_1 + \delta z_2)$ timmt, von einem Zahlenfaktor abgesehen, mit (1.6) überein, verchwindet also dann und nur dann, wenn $z^{(0)}$ auf $\mathfrak{S}$ liegt, was, wie

wir aus **1.** 3 wissen, nur in dem Fall $\{\mathbf{1}; 1.2\}$ zutrifft. Also ist $\delta z_1 = -\delta$ und aus (3. 10) wird:

$$2\,(\mathfrak{G}_\lambda''(z^{(0)})\,\delta z_1^2 + \mathfrak{G}_\lambda''(z^{(0)})\,\overline{\delta z_1^2}).$$

Wenn $\mathfrak{G}_\lambda''(z^{(0)})$ nicht verschwindet, also die stationäre Stelle nicht unter $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$ fällt, so ist diese quadratische Form vom Range 2 und in definit, denn Definitheit würde wegen $\mathfrak{G}_\lambda'(z^{(0)}) = 0$ bedeuten, daß $\Re\mathfrak{e}\,\mathfrak{G}_\lambda(z$ an der Stelle $z^{(0)}$ einen Extremwert hat. Also ist $(z^{(0)}, z^{(0)})$ ein Sattelpunkt, und zwar ein einfacher.

Als Ergebnis von **3.** 7. können wir somit feststellen: Sieht man von den unter $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$ fallenden stationären Stellen ab, so sind die Symmetriepunkte immer Sattelpunkte, und alle auftretenden Sattelpunkte sind einfach.

4. Abschluß des Beweises. Zu zeigen ist, daß $|F(z^*)|$ in $\mathfrak{K}_1'$ nur ein absolutes Maximum hat, d. h., da eine Funktion aus $\mathfrak{K}_1'$ auf $\mathfrak{M}$ im allgemeinen zweimal vertreten ist (vgl. **1.** 3., Ende), daß $\Phi(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{M}$ höchstens zwei absolute Maxima hat, und daß, wenn es wirklich zwei sind, diese nicht in Symmetriepunkten von $\mathfrak{M}$, sondern in Stellen auftreten, die durch Vertauschung von z_1 und z_2 auseinander hervorgehen und daher auf dieselbe Funktion aus $\mathfrak{K}_1'$ führen. Wir werden sogar zeigen, daß das auch richtig ist, wenn wir von relativen statt von absoluten Maxima reden.

Sowohl für die Lage von z_0 als auch für die von z^* sind zwei Hauptfälle und je ein Grenzfall zu unterscheiden. Bezüglich z_0 ist das die schon in **1.** 3. getroffene Unterscheidung. Bezüglich z^* ist es die folgende:

$\{\mathbf{4}; 1\}$. z^* liegt außerhalb von $\mathfrak{M}'$.

$\{\mathbf{4}; 2\}$. z^* liegt im Innern von $\mathfrak{M}'$.

$\{\mathbf{4}; 1,2\}$. z^* liegt auf dem Rande von $\mathfrak{M}'$.

Nur in den Fällen $\{\mathbf{4}; 2\}$ und $\{\mathbf{4}; 1,2\}$ können unter $\{\mathbf{3}; 2\}$ fallende stationäre Stellen auftreten, die bei $\{\mathbf{4}; 1.2\}$ zugleich unter $\{\mathbf{3}; 1_2\}$ fallen (vgl. **3.** 4.).

4. 1. Aus der Betrachtung ausgeschlossen werden können, wie wir jetzt zeigen wollen, sowohl die beiden eben erwähnten Grenzfälle, wie auch solche Systeme z_0, z^*, für die stationäre Stellen vorkommen, die den in **3.** 4 aufgezählten Grenzfällen angehören. Die durch alle andern Systeme z_0, z^* gekennzeichneten Fälle sollen kurz Hauptfälle heißen. $\{\mathbf{3}; 1_2, 2\}$ ist schon mit $\{\mathbf{4}; 1, 2\}$, $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}, 2\}$ mit $\{\mathbf{1}; 1, 2\}$ ausgeschlossen.

Angenommen nun, für irgend ein bestimmtes System z_0, z^*, sagen wir $z_1^{(0)}, z^{*(0)}$, sei die eingangs von **4.** ausgesprochene verschärfte Behauptung falsch, es habe also $\Phi(\mathfrak{z}; z^{*(0)})$ auf $\mathfrak{M}(z_0^{(0)})$ mehr als zwei relative Maxima oder zwei relative Maxima in Symmetriestellen. Es sei ferner z_0, z^* ein beliebiges, zum vorigen hinreichend nahe benachbartes System: dann wäre auch für dieses die Behauptung falsch, wie

r mit Hilfe von **2.3.** schließen können. Denn im einen Falle gäbe auch auf $\mathfrak{M}(z_0)$ mehr als zwei relative Maxima; im andern Fall tte $\mathfrak{M}(z_0)$ ebenso wie $\mathfrak{M}(z_0^{(0)})$ zwei Symmetriepunkte und es gäbe eder mindestens zwei Maxima, und zwar lägen, wie aus dem ersten il des Hilfssatzes in **2.3.** und aus der Stetigkeit der Abhängigkeit r Symmetriestellen von z_0 (vgl. **1.4.**) folgt, mindestens eines derben in beliebig enger Nachbarschaft der einen, ein anderes in liebig enger Nachbarschaft der anderen Symmetriestelle von $\mathfrak{M}(z_0)$: se beiden Maxima könnten also nicht zu Stellen von $\mathfrak{M}(z_0)$ gehören. durch Vertauschung von z_1 und z_2 auseinander hervorgehen. Die hauptung wird also umgekehrt für ein System $z_0^{(0)}, z^{*(0)}$ bewiesen sein, nn sie es für eine Menge von Systemen z_0, z^* ist, für die $z_0^{(0)}, z^{*(0)}$ ufungssystem ist. Ist daher der Beweis für die Hauptfälle erbracht, ist er es auch für die Grenzfälle, wenn gezeigt ist, daß ein zu nem solchen gehöriges System z_0, z^* Häufungssystem der zu den uptfällen gehörigen ist.

Für $\{\mathbf{1}: 1,2\}$ und $\{\mathbf{4}; 1,2\}$ ist das selbstverständlich, ebenso für $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$. Es bleibt also noch der Fall $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$ zu untersuchen. Wir igen, daß wir durch eine bloße beliebig kleine Abänderung von z_0, i festem z^*, von diesem Fall zu einem Hauptfall gelangen können. und $z^{*(0)}$ seien so beschaffen, daß $\mathfrak{M}(z_0^{(0)})$ zwei Symmetriepunkte t und in einem derselben $\mathfrak{z}^{(0)} = (z^{(0)}, z^{(0)})$ eine unter $\{\mathbf{3}; 1_{1,2}\}$ fallende ationäre Stelle vorliegt; $z^{(0)}$ ist also doppelte Nullstelle einer Funkon $\mathfrak{G}_\lambda'(z; z^{*(0)})$ bei passendem λ. Nun durchlaufe z_0' eine Vollumgebung on $z_0^{(0)}$; wir zeigen: a) Die zugehörige $\mathfrak{M}(z_0')$ besitzt jeweils gleichfalls wei Symmetriepunkte, deren einer, $\mathfrak{z}' = (z', z')$, zu $\mathfrak{z}^{(0)}$ benachbart t; und zwar durchläuft z' mindestens eine Halbumgebung von $z^{(0)}$. Die doppelten Nullstellen von $\mathfrak{G}_\lambda(z; z^{*(0)})$ bei veränderlichem λ erllen kein Gebiet, also insbesondere nicht die eben erwähnte Halbmgebung von $z^{(0)}$. Daher gibt es ein zu $z_0^{(0)}$ benachbartes z_0', derart, aß das z' der Symmetriestelle $\mathfrak{z}' = (z', z')$ von $\mathfrak{M}(z_0')$ nicht doppelte ullstelle von $\mathfrak{G}_\lambda(z; z^{*(0)})$ ist. Zu dem System $z_0', z^{*(0)}$ gehört also ein auptfall. Die Richtigkeit von a) erkennt man so: Da $\mathfrak{M}(z_0^{(0)})$ zwei ymmetriepunkte hat, so ist $\mathcal{A}(z_0^{(0)})$ ein zusammenhängender Bereich. essen Symmetriezentrum $\sigma^{(0)}$ in seinem Innern liegt, und $z^{(0)}$ ist eines er beiden Urbilder von $\tau = \sigma^{(0)}$ bei der Abbildung $\tau = \gamma(z): \sigma^{(0)} = \gamma(z^{(0)})$. urchläuft z_0 eine Vollumgebung von $z_0^{(0)}$, so durchläuft das Symmetrieentrum $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma(z_0))$ von $\mathcal{A}(z_0)$, mindestens eine Halbumgebung on $\sigma^{(0)}$, und das eine Urbild von σ ebenfalls mindestens eine Halbmgebung von $z^{(0)}$. — Zum Beweis von b) überlegen wir: Zu einem ζ ibt es ein λ, derart, daß ζ doppelte Nullstelle von $\mathfrak{G}_\lambda'(z; z^{*(0)})$ ist, dann nd nur dann, wenn die beiden linearen homogenen Gleichungen für λ:

$$\lambda_0 G'(\xi; z^{*(0)}) + \lambda_1 \Gamma_1'(\xi) + \lambda_2 \Gamma_2'(\xi) = 0$$
$$\lambda_0 G''(\xi; z^{*(0)}) + \lambda_1 \Gamma_1''(\xi) + \lambda_2 \Gamma_2''(\xi) = 0$$

ein reelles Lösungssystem haben, d. h. wenn die drei zweireihigen Unterdeterminanten des Systems in reellen Verhältnissen stehen. Würde das für alle ζ eines Gebietes zutreffen, so müßten diese beiden Verhältnisse, als analytische Funktionen von ζ, deren Imaginärteil in diesem Gebiete konstant ist, überhaupt Konstanten sein, und das ist nicht möglich, da eine der Determinanten überall in $\mathfrak{B}$ regulär ist, während die beiden anderen in $z^{*(0)}$ einen Pol haben.

4. 2. Es bleibt also noch der Beweis für die Hauptfälle zu erbringen. Die Kroneckersche Formel gibt uns den Wert $-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)}$, das Ergebnisse von **3.** gestatten, die Gesamtzahl $m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)}$ der stationären Stellen anzugeben. Mit p_1' bezeichnen wir die Anzahl der unter $\{\mathbf{3};1_1\}$, mit p_1'' die Anzahl der unter $\{\mathbf{3};1_2\}$ und mit p_2 die Anzahl der unter $\{\mathbf{3};2\}$ fallenden. Da sich nach Ausscheiden der Grenzfälle diese drei Typen gegenseitig ausschließen, so ist

$$m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)} = p_1'+p_1''+p_2,$$

und da ferner nach **3.** 7. in den Hauptfällen nur einfache Sattelpunkte vorkommen, so ist rechts jeweils nur die Anzahl der verschiedenen unter die einzelnen Typen fallenden Stellen abzuzählen.

p_1' ist die Anzahl der Symmetriestellen auf $\mathfrak{M}(z_0)$; p_1'' ist, da doppelte Nullstellen von $\mathfrak{G}_\lambda'$ ausgeschlossen sind, nach **3.**6.2., gleich der doppelten Anzahl der Gebiete $\mathfrak{D}_l$, also gleich 8. p_2 ist, falls z^* außerhalb von $\mathfrak{M}$ liegt, gleich 0; liegt z^* im Innern von $\mathfrak{M}'$, so gehören zu $z_1 =$ zwei verschiedene z_2, ebenso zu $z_2 = z^*$ zwei verschiedene z_1; man erhält also in diesem Falle $p_2 = 4$.

In den vier Hauptfällen haben wir also folgende Gleichungen:

$\{\mathbf{1};1\}$, $\{\mathbf{4};1\}$:

$$-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)} = 2$$
$$m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)} = 10$$

also
$$m^{(0)}+m^{(2)} = 4.$$

Da nach **3.** 7. 2. in einem Hauptfall ein Maximum oder Minimum nicht in einem Symmetriepunkt auftreten kann, so gibt es deren je mindestens 3; also nach der letzten Gleichung insbesondere genau 2 Maxima die zu derselben Funktion aus $\mathfrak{K}_I'$ gehören.

$\{\mathbf{1};1\}$, $\{\mathbf{4};2\}$:

$$-m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)} = 2$$
$$m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)} = 14$$

also
$$m^{(0)}+m^{(2)} = 6.$$

Hier ist $m^{(0)} \geqq 4$, da wir 4 absolute Minima haben, und $m^{(2)} \geqq 2$, also $m^{(2)} = 2$, und wir haben wieder 2 zu derselben Funktion gehörige Maxima.

$\{\mathbf{1}:2\}$, $\{\mathbf{4};1\}$:

$$\begin{aligned} -m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)} &= 0\\ m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)} &= 8\\ m^{(0)}+m^{(2)} &= 4 \end{aligned}$$

o

d man schließt weiter wie im ersten Hauptfall.

$\{\mathbf{1}:2\}$, $\{\mathbf{4};2\}$:

$$\begin{aligned} -m^{(0)}+m^{(1)}-m^{(2)} &= 0\\ m^{(0)}+m^{(1)}+m^{(2)} &= 12\\ m^{(0)}+m^{(2)} &= 6 \end{aligned}$$

o

d man schließt weiter, wie im zweiten Hauptfall.

(Eingegangen am 24. März 1947.)

Ein Beitrag zur Carathéodoryschen Definition der Ortsfunktionen in Booleschen Algebren.

Von

Demetrios A. Kappos in Erlangen.

Einleitung.

In Booleschen Algebren kann man Ortsfunktionen erklären, welc für den Fall, daß die Elemente (Somen) der Booleschen Algebra g wöhnliche Punktmengen bedeuten, den Punktfunktionen entsprech Carathéodory [1]), der zuerst solche Ortsfunktionen eingeführt hat, d finiert sie folgendermaßen: Jedem von dem leeren Element o v schiedenen Element $a \subseteq a_0$ (a_0 ist ein Element der Booleschen A gebra, das als Definitionsbereich der Ortsfunktion vorausgesetzt wir sei eine reelle Zahl $\alpha(a)$ (die untere Grenze) und eine reelle Za $\beta(a)$ (die obere Grenze der Funktion auf a) zugeordnet. Es s gelten:

1. $\alpha(a) \leqq \beta(a)$, $\alpha(a) \geqq \alpha(b)$ und $\beta(a) \leqq \beta(b)$ für $a \subseteq b$.

2. Ist $\alpha(a_0) < \beta(a_0)$, so gibt es mindestens eine im Interva $\alpha(a_0) < \lambda < \beta(a_0)$ überall dicht liegende Folge von Zahlen λ_k, den Elemente a_k eindeutig zugeordnet sind, so daß erstens immer $\beta(a_k) \leqq$ ist und zweitens für jedes Element b mit $b\,a_k = o$ immer $\alpha(\beta) \geqq \lambda_k$ i Carathéodory [2]) hat noch eine zweite Definition der beschränkt Ortsfunktionen gegeben durch Dedekindsche Schnitte, aus endlic wertigen (einfachen) Ortsfunktionen, d. h. Ortsfunktionen, deren Wer vorrat aus einer endlichen Anzahl verschiedener Werte besteht. U aber allgemeine (unbeschränkte) Ortsfunktionen zu erklären, definie er die Ortsfunktionen noch durch Somenskalen. Erklärt man jetzt f die so definierten Ortsfunktionen die obere und untere Grenze a $a \subseteq a_0$, so kann man unter der Voraussetzung, daß die Algebra vo ständig [3]) ist, folgendes beweisen: Dafür daß eine Elementenfunkti

[1]) Carathéodory: Sitzungsberichte Bay. Ak. München. Abt. Math.-Nat. 19 S. 27—68.

[2]) Carathéodory: Math. Zeitschrift 46 (1940) S. 183—189 auch Abh. Ma Sem. Hamburg 14 (1941) S. 251—289. Ausführlich in seinem Buch: Reelle Fun tionen Bd. II noch im Druck befindlich. Kurz CRF II.

[3]) Vollständig heißt eine Boolesche Algebra, wenn in ihr Vereinigung von beliebig vielen (auch nicht abzählbar vielen) Elementen existieren. Sie darüber Kappos, Math. Annalen 120 (1947) S. 43—74.

) die untere Grenze einer Ortsfunktion f sei, ist notwendig und reichend, daß mindestens eine monoton wachsende Elementenktion $\beta(a)$ existiere, für welche die Bedingung gilt: $\alpha(a) = \inf_{b \subseteq a} \beta(b)$.

ie entsprechende Eigenschaft charakterisiert auch die obere Grenze. n soll also nach Bischof[4]) zu der ersten Carathéodoryschen Defion die Bedingung hinzufügen:

Es sei $$\alpha(a) = \inf_{b \subseteq a} \beta(b), \quad \beta(a) = \sup_{b \subseteq a} \alpha(b).$$

erste Carathéodorysche Definition der Ortsfunktionen hat den rteil, daß man sofort die Integrale in Booleschen Algebren nach HN[5]) definieren kann. Andrerseits kann man mit Hilfe der zweiten finition den Integralbegriff genetisch nach Riesz[6]) erklären.

Wir werden im Folgenden die Ortsfunktionen durch Dedekindsche nitte aus einfachen Ortsfunktionen so erklären, daß man durch se Schnitte die allgemeinsten Ortsfunktionen, auch unbeschränkte ält. Das System der Carathéodoryschen einfachen Ortsfunktionen an nämlich teilweise geordnet werden. Erklärt man dann Max (f, g) d Min (f, g) von zwei einfachen Ortsfunktionen als Vereinigung $\cup g$ und Durchschnitt $f \cap g$, so wird die Menge aller einfachen tsfunktionen zu einem Verband. Erweitert man alsdann die Menge r einfachen Ortsfunktionen durch Adjunktion von Ortsfunktionen, ren Wertevorrat aus abzählbar unendlich vielen verschiedenen erten besteht und läßt man auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ als nktionswerte zu, so ist die neue Menge ein Verband mit Null und nselement. In einem solchen Verband kann man nun die Dedezdschen Schnitte nach Mac Neille[7]) erklären und ihn zu einem vollindigen Verband erweitern. In einem solchen Verband hat man er das Stetigkeitsaxiom zur Verfügung, dessen Gültigkeit zur Einnrung des Limesbegriffes von Ortsfunktionen unentbehrlich ist und s Carathéodory[8]) mit Hilfe von Somenskalen für abzählbar viele tsfunktionen bewiesen hat, und zwar für beliebig viele Ortsfunknen.

Zum Schluß zeigen wir, wie man zu der Menge der für eine Maßnktion φ meßbaren endlichen Ortsfunktionen durch Fundamentalgen aus der Menge der endlichen einfachen Ortsfunktionen gegen kann. Ist nämlich die Maßfunktion in dem vollkommenen

[4]) Bischof: Schriften des Math. Inst. Univ. Berlin Bd. 5 (1941) S. 237—262.
[5]) Hahn: Festschrift der 57. Vers. Deutscher Philologen und Schulmänner. tzburg 1929 S. 193. Auch Carathéodory (Zit. 1).
[6]) Riesz, Fr. a) Math. Annalen 69 (1910) S. 449—497 besonders § 1. b) Acta th. 42 (1917) S. 191—205. Auch Nikodym. Fund. Math. 15 (1930) S. 131—179.
[7]) Mac Neille. Trans. Am. Math. Soc. 42 (1937) S. 416—460 besonders § 11.
[8]) CRF II.

Booleschen Ring R_φ totaladditiv, reduziert und normal, so braucht man zur Definition der Integrale die nicht endlichen Ortsfunktionen nicht in Betracht zu ziehen; für sie wäre der Integralwert $+\infty$ oder $-\infty$ oder unbestimmt.

§ 1.

Einfache Ortsfunktionen.

Es sei R ein beliebiger vollständiger Boolescher Ring (Algebra)[9]. Als Definitionsbereich der Ortsfunktionen legen wir ein für alle Male ein Element a von R zu Grunde, das nicht leer ist. Nun betrachten wir Zerlegungen:

$$(1) \qquad a = a_1 + a_2 + \cdots = \sum a_i$$

von a in abzählbar viele paarweise fremde nicht leere Elemente a_i. Jedem Element a_i ordnen wir eine endliche oder unendliche Zahl α_i eindeutig zu; in Zeichen $a_i \to \alpha_i$. Durch diese Zuordnung ist auf a eine *einfache Ortsfunktion* erklärt; in Zeichen:

$$(2) \qquad f = S(a_i \to \alpha_i).$$

Sind alle α_i endlich, so heißt f *endlich*: dies bedeutet aber nicht, daß die Menge der α_i, d. h. f, beschränkt ist.

Zwischen Ortsfunktionen führen wir eine *Gleichheit* ein: Entsprechen f und g derselben Zerlegung, so sind sie gleich, wenn sie identisch sind. Entsprechen f und g verschiedenen Zerlegungen z. B.

$$(3) \qquad \begin{aligned} f &= S(a_i \to \alpha_i) \qquad a = \sum a_i \\ g &= S(b_j \to \beta_j) \qquad a = \sum b_j, \end{aligned}$$

so ist $f = g$, wenn

$$(4) \qquad S^*(a_i b_j \to \alpha_i) = S^*(a_i b_j \to \beta_j)$$

stattfindet. Der Stern bedeutet, daß nur solche Kombinationen von i, j in der Darstellung (4) zu nehmen sind, für welche $a_i b_j \neq o$ ist.

Man erklärt durch:

$$(5) \qquad \begin{aligned} f \pm g &= S^*(a_i b_j \to \alpha_i \pm \beta_j), \quad fg = S^*(a_i b_j \to \alpha_i \beta_j) \\ f : g &= S^*(a_i b_j \to \alpha_i : \beta_j) \end{aligned}$$

neue Ortsfunktionen, falls die Operationen der reellen Zahlen rechts einen Sinn haben[10]. Der Zerlegung $a = a$ entsprechen konstante

[9]) S. für diese Begriffe Kappos, Math. Annalen 120 (1947) S. 43—74, im Folgenden KCI.

[10]) Ist eine oder sind mehrere Operationen mit reellen Zahlen rechts nicht ausführbar, so kann man die Ortsfunktionen $f \pm g$ bzw. fg bzw. $f : g$, in welchen dies vorkommt, als Ortsfunktion betrachten, deren Definitionsbereich aber nicht

sfunktionen $(a \to \alpha)$, $(a \to 0)$, $(a \to \infty)$ usw. Diese Ortsfunktionen eichnen wir mit $\alpha, 0, \infty$, usw. Wir definieren nun:

Es ist $f \geqq 0$ *bzw.* $f > 0$, *wenn alle* $\alpha_i \geqq 0$ *bzw.* $\alpha_i > 0$ *für mindestens ein* i.

Es ist $f \geqq g$ *bzw.* $f > g$, *wenn* $f - g \geqq 0$ *bzw.* $f - g > 0$ *ist.*

rbei soll die Differenz $+\infty - \infty$, falls sie vorkommt, als gleich l angenommen werden.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{E}$ die Menge aller möglichen einfachen Ortsktionen auf a. Dann gilt offensichtlich:

Durch (7) *ist die Menge* $\mathfrak{E}$ *teilweise geordnet.*

r definieren

$$f \cup g = S^*[a_i b_j \to \operatorname{Max}(\alpha_i, \beta_j)], \quad f \cap g = S^*(a_i b_j \to \operatorname{Min}(\alpha_i, \beta_j)].$$

n kann leicht bestätigen, daß diese beiden Operationen die chateristischen Eigenschaften der Vereinigung bzw. des Durchschnittes der teilweise geordneten Menge $\mathfrak{E}$ besitzen und weil sie immer in ausführbar sind, so ist $\mathfrak{E}$ ein Verband[11]). Der Verband $\mathfrak{E}$ besitzt ll und Einselement, nämlich die konstanten Ortsfunktionen $-\infty$ l $+\infty$ und ist distributiv.

§ 2.

Dedekindsche Schnitte im System der Ortsfunktionen.

Nun kann man in $\mathfrak{E}$ Dedekindsche Schnitte erklären und dadurch allgemeinsten Ortsfunktionen definieren:

Def. I. *Zwei Teilmengen* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{E}$ *bilden einen Dedekindschen nitt* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ *in* $\mathfrak{E}$, *wenn folgende Bedingungen gelten*:

a) *Aus* $f \in \mathfrak{A}$ *und* $g \in \mathfrak{B}$ *folgt* $f \leqq g$.
b) *Aus* $f \leqq h$ *für jedes* $f \in \mathfrak{A}$ *folgt* $h \in \mathfrak{B}$.
c) *Aus* $y \leqq g$ *für jedes* $g \in \mathfrak{B}$ *folgt* $y \in \mathfrak{A}$.

enbar gehört $-\infty$ immer zu $\mathfrak{A}$ und $+\infty$ immer zu $\mathfrak{B}$. Es ist also geschlossen, daß eine der Teilmengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ leer ist.

ır das Element a sei, sondern ein Teil von a, den man bekommt, nachdem n alle Elemente $a_i b_j$ von a wegnimmt, an denen die Operationen der reellen len keinen Sinn haben; ähnlich macht man es bei gewöhnlichen Punktfunkıen (s. Carathéodory, Reelle Funktionen I 1939 § 119). Man kann sogar die Darstellungen (5) beibehalten, nachdem man dem Stern die weitere leutung gibt: S^* bedeutet, daß nur solche Kombinationen von i, j in den Darlungen (5) zu nehmen sind, für welche $a_i b_j$ nicht leer ist und $\alpha_i \pm \beta_j$ bzw. $_j$ bzw. $\alpha_i : \beta_j$ einen Sinn hat.

[11]) S. Hermes-Köthe: Theorie der Verbände. Enzyk. Math. Wiss. 2. Auf. 39) I 1, 13, auch KCI § 1.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die Menge aller möglichen Dedekindsche Schnitte in $\mathfrak{E}$ und definieren in $\mathfrak{S}$ die Relation $\leqq$:

Def. II. *Es ist* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$, *wenn* $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{C}$ *ist.*

Dann folgt leicht:

(10) *Es ist* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$, *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{B}$ *ist.*

Dann gelten aber:

(11) *Es ist* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$.

(12) *Aus* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ *und* $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}] \leqq [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$ *folgt* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$.

(13) *Aus* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \leqq [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$ *und* $[\mathfrak{C}, \mathfrak{D}] \leqq [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ *folgt, daß* $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$, *d. h.* $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]$.

Wir haben also

(14) $\mathfrak{S}$ *ist durch Def. II teilweise geordnet.*

Ist $\{[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\}$ irgendeine Menge von Schnitten, so ist der mengentheoretische Durchschnitt aller Mengen $\{\mathfrak{A}\}$ bzw. $\{\mathfrak{B}\}$ nicht leer. Wir bezeichnen den ersten Durchschnitt mit $\mathfrak{A}^*$ bzw. den zweiten mit $\mathfrak{B}^*$. Wir bezeichnen weiter mit $\mathfrak{B}_*$ die Teilmenge von $\mathfrak{E}$, die aus allen $g_* \in \mathfrak{E}$ besteht, die die Bedingung erfüllen:

(15) Es ist $g_* \geqq f^*$ für jedes $f^* \in \mathfrak{A}^*$

bzw. mit $\mathfrak{A}_*$ die Teilmenge von $\mathfrak{E}$, die aus allen $f_* \in \mathfrak{E}$ besteht, die die Bedingung erfüllen:

(16) Es ist $f_* \leqq g^*$ für jedes $g^* \in \mathfrak{B}^*$.

Nun beweist man [12]: $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}_*]$ bzw. $[\mathfrak{A}_*, \mathfrak{B}^*]$ sind Schnitte und zwar ist $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}_*] = \bigcap [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, d. h. der Durchschnitt aller Schnitte $\{[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\}$ bzw. $[\mathfrak{A}_*, \mathfrak{B}^*] = \bigcup [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, d. h. die Vereinigung aller Schnitte $\{[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\}$. Wir haben also:

(17) $\mathfrak{S}$ *ist ein vollständiger Verband.*

Es sei nun f eine beliebige einfache Ortsfunktion, wir bezeichnen durch $\mathfrak{F}$ die Menge aller Ortsfunktionen $h \in \mathfrak{E}$ mit $h \leqq f$ und durch $\overline{\mathfrak{F}}$ die Menge aller Ortsfunktionen $\bar{h} \in \mathfrak{E}$ mit $f \leqq \bar{h}$; dann ist $[\mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{F}}]$ ein Schnitt. Man kann also jeder Ortsfunktion $f \in \mathfrak{E}$ einen Schnitt $[\mathfrak{F}, \overline{\mathfrak{F}}]$ zuordnen. Durch diese Zuordnung haben wir einen Isomorphismus zwischen den Elementen von $\mathfrak{E}$ und den Elementen einer Teilmenge $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{S}$. Bei diesem Isomorphismus bleiben erhalten, die Relation $\leqq$, das Eins- und Nullelement, die Operationen $\cup$ und $\cap$. Man kann also $\mathfrak{S}$ als Erweiterung von $\mathfrak{E}$ betrachten und sagen, daß durch jeden Schnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ eine allgemeine Ortsfunktion dargestellt wird. Es gilt

(18) Ist $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ein Schnitt und gehört eine einfache Ortsfunktion sowohl zu $\mathfrak{A}$, wie auch zu $\mathfrak{B}$, so stellt der Schnitt diese Ortsfunktion

[12] Mac Neille, Zitat 7.

dar. Denn es ist hier wegen Def. Ib) und c) $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{F}}$. ellt also ein Schnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ keine einfache Ortsfunktion dar, so gilt: us $f \in \mathfrak{A}$ und $g \in \mathfrak{B}$ folgt $f < g$.

Einfache und daher auch allgemeine Ortsfunktionen können wir uf jedem nicht leerem Teilelement x von a definieren:

Die einfache Ortsfunktion f (§ 1 (2)) erklären wir auf x durch:

9) $$f = S^*(a_i x \to \alpha_i).$$

Die untere bzw. die obere Grenze der Zahlen α_i, welche in (19) orkommen, kann man als untere Grenze $\alpha(f, x)$ bzw. als obere Grenze (f, x) von f in x bezeichnen.

Es sei f^* eine beliebige Ortsfunktion, die durch den Dedekindschen chnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ erklärt, wir betrachten die Menge aller reellen Zahlen

$$\{\alpha(h, x)\}, \quad \{\alpha(g, x)\}, \quad \{\beta(h, x)\}, \quad \{\beta(g, x)\}$$

ir alle $h \in \mathfrak{A}$ und $g \in \mathfrak{B}$, dann ist

$$[\{\alpha(h, x)\}, \{\alpha(g, x)\}] \text{ bzw. } [\{\beta(h, x)\}, \{\beta(g, x)\}]$$

in Schnitt von reellen Zahlen und stellt die untere Grenze $\alpha(f^*, x)$ zw. die obere Grenze $\beta(f^*, x)$ der Ortsfunktion f^* in x dar.

Es sei eine beliebige reelle Zahl λ gegeben, dann kann man das eilelement von a bestimmen, in welchem eine einfache Ortsfunktion $\leqq \lambda$ ist; das ist die Vereinigung von allen a_i, auf welchen die zu-eordneten Zahlen $\alpha_i \leqq \lambda$ sind. Wir bezeichnen dieses Element mit $^* \leqq \lambda]$. Analog erklärt man die Elemente $[f < \lambda]$, $[f \geqq \lambda]$, $[f = \lambda]$. ür eine beliebige Ortsfunktion f^*, die durch den Schnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ dar-estellt ist, erklärt man $[f^* \leqq \lambda]$ bzw. $[f^* < \lambda]$ folgendermaßen: Man setzt:

$$s(\lambda) = \sum_{g \in \mathfrak{B}} \dot{+} [g \leqq \lambda] \quad \text{oder} \quad s^*(\lambda) = \prod_{h \subset \mathfrak{A}} [h \leqq \lambda]$$

nd dann

$$^* \leqq \lambda] = \prod_{\lambda < \varrho} s(\varrho) = \prod_{\lambda < \varrho} s^*(\varrho) \text{ bzw. } [f < \lambda] = \sum_{\lambda > \varrho} \dot{+} s(\varrho) = \sum_{\lambda > \varrho} \dot{+} s^*(\lambda).$$

$^* > \lambda]$ bzw. $[f \geqq \lambda]$ wird dann als Komplement von $[f \leqq \lambda]$ bzw. $[f < \lambda]$ ezüglich a erklärt und dann

$$[f^* = \lambda] = [f^* \geqq \lambda]\,[f^* \leqq \lambda].$$

Eine beliebige Ortsfunktion f heißt beschränkt in a, wenn $\alpha(f, a)$ nd $\beta(f, a)$ endliche Zahlen sind, sie heißt endlich, wenn

$$[f = +\infty] \text{ und } [f = -\infty]$$

eer sind. Es gilt dann:

Die Ortsfunktion $f = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ist dann und nur dann beschränkt, venn zwei endliche Zahlen λ_1 und λ_2 existieren, so daß

$$\lambda_1 \leqq g \text{ für jedes } g \in \mathfrak{B} \text{ und } \lambda_2 \geqq h \text{ für jedes } h \in \mathfrak{A}$$

gilt.

§ 3.

Vergleich mit der Carathéodoryschen Definition.

Carathéodory hat die beschränkten Ortsfunktionen durch Schnitte folgendermaßen erklärt:

Es sei $\mathfrak{E}_0$ die Menge aller einfachen Ortsfunktionen, die Zerlegungen mit endlich vielen Zerlegungsgliedern entsprechen, und endlich sind, d. h. $f \in \mathfrak{E}_0$ bedeutet

$$f = S(a_i \to \alpha_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ und } -\infty < \alpha_i < +\infty.$$

Solche einfachen Ortsfunktionen nennt Carathéodory endlichwertig. Zwei Teilmengen $\{h\}$, $\{g\}$ von $\mathfrak{E}_0$ bilden einen Schnitt, wenn folgendes gilt:

α) Aus $h \in \{h\}$ und $g \in \{g\}$ folgt $h \leqq g$.

β) Jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ kann man mindestens ein h und ein g zuordnen, so daß $g - h < \varepsilon$ ist.

Diese Schnitte können teilweise geordnet werden. Nur folgt hier nicht aus $[\{h\}, \{g\}] \leqq [\{h'\}, \{g'\}]$ und $[\{h'\}, \{g'\}] \leqq [\{h\}, \{g\}]$, daß die Menge $\{h\} = \{h'\}$ bzw. $\{g\} = \{g'\}$ ist, also die Schnitte gleich sind. Man kann aber in diesem Falle die Schnitte als äquivalent betrachten und nach dieser Äquivalenzrelation die Menge aller Carathéodoryschen Schnitte in Klassen ordnen. Jeder Klasse ordnet man dann durch Definition eine beschränkte Ortsfunktion zu.

Es sei jetzt k eine Klasse von Schnitten, die die beschränkte Ortsfunktion f definiert, $[\{h\}, \{g\}]$ ein Repräsentant der Klasse. Wir bezeichnen die Menge aller einfachen Ortsfunktionen $g^* \in \mathfrak{E}$, für welche

$$h \leqq g^* \qquad \text{für alle } h \in \{h\} \prec \mathfrak{E}_0$$

gilt, mit $\mathfrak{B}^*$ und die Menge aller einfachen Ortsfunktionen $h^* \in \mathfrak{E}$, für welche

$$g \geqq h^* \qquad \text{für alle } g \in \{g\} \prec \mathfrak{E}_0$$

gilt, mit $\mathfrak{A}^*$; dann ist $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*]$ ein Schnitt in unserem Sinne. Es ist klar, daß man zu demselben Schnitt $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*]$ kommt, wenn man von irgend einen anderen Repräsentant der Klasse k ausgeht. Jeder Carathéodoryschen Ortsfunktion können wir also eine beschränkte Ortsfunktion aus $\mathfrak{S}$ zuordnen. Aber auch umgekehrt, jeder beschränkten Ortsfunktion aus $\mathfrak{S}$ kann man einen Carathéodoryschen Schnitt und dementsprechend eine Carathéodorysche beschränkte Ortsfunktion zuordnen. Da nämlich $f = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] \in \mathfrak{S}$ beschränkt ist, gibt es zwei endliche Zahlen α und β, so daß $\alpha \leqq g$ für alle $g \in \mathfrak{B}$ und $\beta \geqq h$ für alle $h \in \mathfrak{A}$ ist. Betrachtet man jetzt die Teilmenge $\mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{A}$ bzw. von $\mathfrak{B}$, die aus allen endlichwertigen Ortsfunktionen besteht, deren Wertevorrat zwischen α und β liegt, so ist $[\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*]$ ein Carathéodoryscher Schnitt, also ein Repräsentant der Klasse, die eine beschränkte Carathéodorysche Ortsfunktion erklärt. Da hier α) gilt, braucht man

ır β) zu beweisen. Es sei nämlich $\varepsilon > 0$ eine beliebige Zahl, dann önnen wir zwischen α und β endlich viele Zahlen wählen:

$$\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta$$

erart, daß $\lambda_{i+1} - \lambda_i < \varepsilon$ für alle $i = 0, 1, 2 \ldots, n$ ist. Wir setzen

$$s_i = [f \geqq \lambda_i] + [f \geqq \lambda_{i+1}] = [\lambda_i \leqq f < \lambda_{i+1}] \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

nd betrachten die zwei endlichwerten Ortsfunktionen

$$h_n = S^*(s_i \to \lambda_i), \quad g_n = S^*(s_i \to \lambda_{i+1}) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

s ist $h_n \in \mathfrak{A}^*$ und $g_n \in \mathfrak{B}^*$ und $g_n - h_n < \varepsilon$; β) ist also auch erfüllt.

§ 4.

Endliche Ortsfunktionen.

Es sei $f = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ eine endliche Ortsfunktion und ε eine beliebige ositive Zahl; wir werden zeigen, daß es mindestens eine endliche infache Ortsfunktion $h \in \mathfrak{A}$ und eine einfache endliche Ortsfunktion $\in \mathfrak{B}$ gibt, derart, daß $g - h < \varepsilon$ ist. Denn wir können abzählbar viele ahlen λ wählen, so daß

$$-\infty < \ldots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < +\infty \ ,$$

it $\lim \lambda_n = +\infty$, $\lim \lambda_{-n} = -\infty$ und

$$|\lambda_{i+1} - \lambda_i| < \varepsilon \quad \text{für alle } i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

ann setzen wir

$$s_i = [\lambda_i \leqq f < \lambda_{i+1}] \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

nd bilden die zwei einfachen Ortsfunktionen

$$h = S^*(s_i \to \lambda_i) \quad g = S^*(s_i \to \lambda_{i+1}) \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es ist nun $h \in \mathfrak{A}$, $g \in \mathfrak{B}$ und $g - h < \varepsilon$.

Die letztere Eigenschaft der endlichen Ortsfunktionen erlaubt uns ie endlichen Ortsfunktionen mit der Carathéodoryschen Methode urch Schnitte, aus der Menge aller einfachen endlichen Ortsfunktionen zu erklären.

Man kann außerdem leicht die Summe, Differenz, das Produkt nd den Quotienten von zwei endlichen Ortsfunktionen erklären. Es eien z. B. $f = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ und $f' = [\mathfrak{A}', \mathfrak{B}']$ zwei endliche Ortsfunktionen; edem Paar von endlichen einfachen Ortsfunktionen $h \in \mathfrak{A}$, $h' \in \mathfrak{A}'$ zw. $g \in \mathfrak{B}$, $g' \in \mathfrak{B}'$ ordnen wir nach § 1 Formel (5) die endlichen einachen Ortsfunktionen $h + h'$ bzw. $g + g'$ zu. Die Mengen $\{h + h'\}$ und $g + g'\}$ bilden dann einen Schnitt nach Carathéodory. Jetzt fügen vir zu der Menge $\{h + h'\}$ alle einfachen Ortsfunktionen $h^* \in \mathfrak{E}$, für velche $h^* \leqq g + g'$ für alle $g + g'$ gilt und zu der Menge $\{g + g'\}$ alle infachen Ortsfunktionen $g^* \in \mathfrak{E}$, für welche $h + h' \leqq g^*$ für alle $h + h'$ ilt, so hat man einen Schnitt in unserem Sinne, der die Summe $f + f'$ larstellt. Analog kann man Produkt, Differenz und Quotient erklären.

§ 5.

Ortsfunktionen in Booleschen Algebren mit reduziertem Maß.

Es sei R_φ ein vollkommener Boolescher Ring (Algebra). In R_φ sei eine Maßfunktion φ definiert, die totaladditiv, reduziert und normal ist[14]). Für ein Element $a \in R_\varphi$ sei $\varphi(a) < +\infty$. Die Teilmenge R_φ^a von R_φ, die aus allen Elementen von R_φ besteht, die Teile von a sind, ist auch ein vollkommener Ring und zwar mit vollem Element a. Die Maßfunktion φ ist in R_φ^a totaladditiv, reduziert und beschränkt; R_φ^a ist also nach einem Satz von Wecken[15]) vollständig. Erklärt man auf a die Menge $\mathfrak{E}$ der einfachen Ortsfunktionen und dann durch Dedekindsche Schnitte die Menge $\mathfrak{S}$ aller Ortsfunktionen, so sind wegen der Vollständigkeit des Ringes R_φ^a die Elemente $[f \geqq \lambda]$ für alle reellen Zahlen λ und für alle Ortsfunktionen $f \in \mathfrak{S}$ in R_φ^a vorhanden, d. h. alle Ortsfunktionen $f \in \mathfrak{S}$ sind meßbar. Betrachtet man als summierbare Ortsfunktionen über a diejenigen Ortsfunktionen, für welche der Integralwert über a eine endliche Zahl ist, so sind alle nicht endlichen Ortsfunktionen nicht summierbar, denn wir haben für eine nicht endliche Ortsfunktion f eine oder beide Elemente $[f = +\infty]$, $[f = -\infty]$ nicht leer, also für ein oder beide dieser Elemente die Maßfunktion $\varphi > 0$. Der Integralwert ist also für eine nicht endliche Ortsfunktion entweder $+\infty$ oder $-\infty$ oder nicht vorhanden. Man braucht also die nicht endlichen Ortsfunktionen nicht in Betracht zu ziehen.

Im letzten § haben wir gesehen, daß man die Menge der endlichen Ortsfunktionen mit der Carathéodoryschen Methode durch Schnitte aus der Menge aller einfachen endlichen Ortsfunktionen definieren kann. Wir werden jetzt sehen, wie wir zu der Menge aller endlichen Ortsfunktionen durch Fundamentalfolgen aus der Menge der endlichen einfachen Ortsfunktionen gelangen.

Für ein Element $a \in R_\varphi$ mit $\varphi(a) < +\infty$ erklären wir wie in § 1 alle einfachen aber endlichen Ortsfunktionen, deren Menge wir mit $\mathfrak{E}'$ bezeichnen. Die in § 1 durch (5) erklärten Operationen $f \pm g$, fg sind dann immer in $\mathfrak{E}'$ ausführbar und $\mathfrak{E}'$ ist in bezug auf diese Operationen ein Ring, die Menge der konstanten Ortsfunktionen ist isomorph zu dem Körper der reellen Zahlen. Durch die Erklärungen (6) und (7) § 1 ist die Menge teilweise geordnet und bezüglich der Operationen (9) § 1 ein distributiver Verband ohne leeres und volles Element. Wir setzen

$$f^+ = f \cup 0, \quad f^- = (-f) \cup 0, \tag{1}$$

dann ist

$$f = f^+ - f^- \text{ und } |f| = f^+ + f^- = f \cup (-f). \tag{2}$$

[14]) S. diese Begriffe KCI. § 8.

[15]) Wecken, Math. Zeitschrift 45 (1939). auch KCI. § 11.

Die sogenannten charakteristischen Ortsfunktionen, d. h. die einchen Ortsfunktionen, die nur die Werte Null und Eins annehmen, iden eine Teilmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{E}'$. $\mathfrak{C}$ ist ein Unterverband von $\mathfrak{E}'$ mit ull- (bzw. Eins-)Element, nämlich mit den konstanten Ortsfunktionen und 1, der komplementär ist. $\mathfrak{C}$ ist also eine Boolesche Algebra.

Definition. *Eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ aus $\mathfrak{E}'$ heißt nach oben (bzw. nten) beschränkt in $\mathfrak{E}'$, wenn es ein $g \in \mathfrak{E}'$ existiert derart, daß*

$$f_i \leqq g \text{ bzw. } f_i \geqq g \qquad \text{für alle } i = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

lt. Ist g eine konstante Ortsfunktion, so heißt die Folge nach oben zw. unten) gleichmäßig beschränkt. Die Folge heißt beschränkt, enn sie gleichzeitig nach oben und unten beschränkt ist.

Die kleinste (bzw. größte) unter den Ortsfunktionen g, die die edingung (3) erfüllt, falls sie existiert, ist durch

$$\bigcup_i f_i \text{ bzw. } \bigcap_i f_i \tag{4}$$

egeben, sie heißt obere (bzw. untere) Grenzortsfunktion der olge $\{f_i\}$. Es ist sehr wichtig für die Einführung von Grenzprozessen, aß die unter der Bedingung der Beschränktheit eingeführten Operaonen $\cup$ und $\cap$ für abzählbar viele Elemente ausführbar sind. Dies ollen wir durch Erweiterung des Verbandes $\mathfrak{E}'$ erreichen.

Definition α. *Eine Folge $\{f_i\}$ aus $\mathfrak{E}'$ heißt konvergent gegen $\in \mathfrak{E}'$, in Zeichen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, wenn zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ xistiert derart, daß $|f_n - f| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$ gilt. Ist $f = 0$, so eißt die Folge eine Nullfolge.*

Definition β. *Eine Folge $\{f_i\}$ aus $\mathfrak{E}'$ heißt eine Fundamenalfolge, wenn zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert derart, daß $|f_\mu - f_\nu| < \varepsilon$ für alle $\mu, \nu > n_0$ gilt.*

Jede nach Def. α konvergierende Folge ist eine Fundamentalfolge; u jeder Fundamentalfolge existiert aber nicht immer eine Grenzortsunktion in $\mathfrak{E}'$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Menge aller Fundamentalfolgen aus $\mathfrak{E}'$ nit $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{N}$ die Menge aller konvergierenden Folgen (bzw. Nullfolgen) n $\mathfrak{E}'$. Dann ist $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{K} \prec \mathfrak{M}$.

Nun definieren wir die folgenden Operationen in $\mathfrak{M}$.

$$\{f_i\} \pm \{g_i\} = \{f_i \pm g_i\} \tag{4}$$

$$\{f_i\} \cdot \{g_i\} = \{f_i g_i\} \tag{5}$$

$$\{f_i\} \cup \{g_i\} = \{f_i \cup g_i\} \tag{6}$$

$$\{f_i\} \cap \{g_i\} = \{f_i \cap g_i\} \tag{7}$$

$$|\{f_i\}| = \{|f_i|\} \tag{8}$$

Wir bemerken, daß alle diese Operationen mit Ausnahme von (5) immer ausführbar in $\mathfrak{M}$ sind, denn die Folgen rechts in (4), (6)—(8) sind Fundamentalfolgen, wenn $\{f_i\}$ und $\{g_i\}$ Fundamentalfolgen sind, wie

man leicht zeigen kann, ganz analog, wie bei der Erweiterung der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen [16]). Die Operation (5) ist nun für gleichmäßig beschränkte Fundamentalfolgen immer ausführbar.

In $\mathfrak{M}$ führen wir jetzt eine Äquivalenzrelation ein:

Definition γ. *Zwei Fundamentalfolgen heißen äquivalent in Zeichen* $\{f_i\} \sim \{g_i\}$, *wenn* $\{f_i - g_i\}$ *in* $\mathfrak{N}$ *ist.*

Es gilt offenbar:

(9) Aus $\{f_i\} \sim \{g_i\}$ *und* $\{f_i^*\} \sim \{g_i^*\}$ *folgt:*

1) $\{f_i\} \pm \{f_i^*\} \sim \{g_i\} \pm \{g_i^*\}$, 2) $\{f_i\} \cup \{f_i^*\} \sim \{g_i\} \cup \{g_i^*\}$,
3) $\{f_i\} \cap \{f_i^*\} \sim \{g_i\} \cap \{g_i^*\}$, 4) $\lambda . \{f_i\} \sim \lambda . \{g_i^*\}$.

Durch Def. γ wird $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ in Restklassen eingeteilt, deren Menge wir mit $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ bezeichnen.

Wegen (9) können wir die Operationen zwischen zwei Elementen (Restklassen) aus $\mathfrak{E}^*$ durch Repräsentanten in $\mathfrak{M}$ erklären.

Da $\mathfrak{N}^*$ isomorph zu $\mathfrak{E}'$ relativ zu allen diesen Operationen ist, so identifizieren wir die Elemente von $\mathfrak{N}^*$, mit denen von $\mathfrak{E}'$ und betrachten $\mathfrak{E}^*$ als Erweiterung von $\mathfrak{E}'$. Die Elemente von $\mathfrak{E}^*$ nennen wir allgemeine endliche Ortsfunktionen auf a und bezeichnen sie auch mit f, g, h usw.

Da $\mathfrak{E}^*$ in Bezug zu $\cup$ und $\cap$ ein Verband ist, so können wir die Relation $\leqq$ in $\mathfrak{E}^*$ folgendermaßen definieren

Def. δ. *Es ist* $f \leqq g$, *wenn* $f \cap g = f$ *oder* $f \cup g = g$ *ist.*

Wir beweisen jetzt den Satz:

Satz A. *Es sei* $\mathfrak{r}$ *eine Restklasse, die eine Ortsfunktion* $f \in \mathfrak{E}^*$ *definiert, dann gibt es in* $\mathfrak{r}$ *ein Paar von Fundamentalfolgen* $\{f_i'\}, \{f_i''\}$ *so daß*

(10) $$f_\mu' \leqq f_\nu' \leqq f_\nu'' \leqq f_\mu'' \qquad \text{für alle } \mu \leqq \nu$$

gilt.

Beweis. Es sei $\{f_i\}$ eine beliebige Fundamentalfolge der Restklasse $\mathfrak{r}$ und $\{\varepsilon_i\}$ irgendeine Nullfolge von positiven Zahlen, dann kann man zu jedem $\varepsilon_i > 0$ eine natürliche Zahl ϱ_i bestimmen, so daß $|f_n - f_m| \leqq \varepsilon_i$ für alle $n \geqq \varrho_i$, $m \geqq \varrho_i$ ist. Die Teilfolge $\{f_{\varrho_i}\}$ von $\{f_i\}$ gehört auch der Klasse $\mathfrak{r}$ an. Nun setzen wir

$$\{f_i^*\} = \{f_{\varrho_i} - \varepsilon_i\}, \quad \{f_i^{**}\} = \{f_{\varrho_i} + \varepsilon_i\}.$$

Diese beiden Folgen gehören auch der Klasse $\mathfrak{r}$ an und es gilt:

$$f_m^* \leqq f_n^{**} \qquad \text{für alle } m, n = 1, 2, \ldots.$$

Setzt man

$$f_1' = f_1^*, \quad f_{n+1}' = f_{n+1}^* \cup f_n' \qquad \text{für alle } n = 1, 2, \ldots,$$
$$f_1'' = f_1^{**}, \quad f_{n+1}'' = f_{n+1}^{**} \cap f_n''$$

so bekommt man zwei Folgen $\{f_i'\}$ und $\{f_i''\}$ die auch zu $\mathfrak{r}$ gehören und die Eigenschaft (10) besitzen, w. z. b. w.

[16]) vgl. z. B. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra I, 2. Aufl., 1937, § 67.

Def. ε. *Zwei Folgen* $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ *aus* $\mathfrak{E}'$ *bilden eine Schachtelung* $\mathfrak{E}'$, *in Zeichen* $[f_i, g_i]$, *wenn für sie folgendes gilt:*

1) $f_\mu \leqq f_\nu \leqq g_\nu \leqq g_\mu$ *für alle* $\mu \leqq \nu$

2) $\lim_{n\to\infty} (g_n - f_n) = 0.$

ezeichnet man mit $\mathfrak{M}'$ die Menge aller Schachtelungen und führt an die Äquivalenzrelation:

1) $[f_i', g_i'] \sim [f_i'', g_i'']$, wenn $f_i' \leqq g_i''$ und $f_i'' \leqq g_i'$

$\mathfrak{M}$ ein und bezeichnet man mit $\mathfrak{E}^{**}$ die Menge der Restklassen ach dieser Äquivalenzrelation, so folgt aus Satz A, daß $\mathfrak{E}^{**}$ zu $\mathfrak{E}^*$ omorph ist.

Wir beweisen jetzt

Satz B. *Die Menge* $\mathfrak{E}^*$ *ist vollständig, d. h. jede Fundamentalolge, die wir aus Elementen von* $\mathfrak{E}^*$ *bilden können, ist konvergent in* $\mathfrak{E}^*$.

Beweis. Zuerst folgt aus der Definition von $\mathfrak{E}^*$, daß jede Fundaentalfolge $\{f_i\}$ mit $f_i \in \mathfrak{E}' \prec \mathfrak{E}^*$ konvergent ist, also $\lim_{n\to\infty} f_n = f^* \in \mathfrak{E}^*$.

s sei jetzt eine beliebige Fundamentalfolge $\{f_i^*\}$ in $\mathfrak{E}^*$, dann existiert ine Fundamentalfolge $\{f_{in}\}$ aus $\mathfrak{E}'$ mit $\lim_{n\to\infty} f_{in} = f_i^*$, $i = 1, 2, \ldots$.

st $\{\varepsilon_i\}$ eine Nullfolge von positiven Zahlen, so können wir zu jedem eine Zahl ν_i bestimmen, so daß

11) $|f_{i\nu_i} - f_i^*| < \varepsilon_i$

ilt. Wir setzen $f_{i\nu_i} = f_i'$, dann ist also

12) $|f_i' - f_i^*| < \varepsilon_i, \quad f_i' \in \mathfrak{E}'.$

Wir bilden nun die Folge $\{f_i'\}$ $f_i' \in \mathfrak{E}'$, und zeigen, daß sie eine Fundaentalfolge ist. Dazu bemerken wir, daß es zu jedem ε erstens ein $n'(\varepsilon)$ gibt derart, daß

$$|f_n^* - f_m^*| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{für alle } n, m > n'$$

gilt und zweitens ein $n''(\varepsilon)$ derart, daß

$$\varepsilon_k < \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad \text{für alle } k > n''.$$

Dann haben wir aber

$$|f_m' - f_n'| \leqq |f_m' - f_m^*| + |f_m^* - f_n^*| + |f_n^* - f_n'| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

also

$$|f_m' - f_n'| < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n > n_0 = \operatorname{Max}(n', n'').$$

Es gibt also ein $f^* \in \mathfrak{E}^*$, so daß $\lim_{n\to\infty} f_n' = f^*$ und wegen (12) ist dann $\lim_{n\to\infty} f_n^* = f^*$ w. z. b. w.

Aus der Definition von $\mathfrak{E}^*$ und der Relation $\leqq$ in $\mathfrak{E}^*$ folgt leicht:

Satz C. *Es seien f und $f^* \in \mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}^*$ die Restklassen in $\mathfrak{M}$ die f bzw. f^* definieren, dann gilt*

$$f \leqq f^*$$

dann und nur dann, wenn eine Folge $\{f_i\}$ in $\mathfrak{r}$ bzw. eine Folge $\{f_i^*\}$ in $\mathfrak{r}^*$ existiert, so daß $f_i^* - f_i \geqq 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ gilt.

Wir bemerken, daß jede Fundamentalfolge $\{f_i\}$ aus $\mathfrak{E}'$ beschränkt in $\mathfrak{E}'$ ist, d. h. es existiert ein $g \in \mathfrak{E}'$ derart, daß $|f_i| \leqq g$ für alle $i = 1, 2, \ldots$. Daraus folgt

Satz D. *Zu jedem $f \in \mathfrak{E}^*$ existiert immer ein $g \in \mathfrak{E}'$ derart, daß $|f| \leqq g$ ist.*

§ 6.

Somenskalen.

Es sei $f \in \mathfrak{E}'$, nämlich $f = S(a_i \to \alpha_i)$. Einer jeden endlichen Zahl λ ordnen wir die Summe aller a_i, deren zugeordnete Werte $\alpha_i < \lambda$ sind, zu. Diese Summe, die ein Teilelement von a ist, bezeichnen wir mit $[f < \lambda] = s_f(\lambda)$. Gibt es keine Zahl $\alpha_i < \lambda$, so setzen wir $s_f(\lambda) = o$. Dies kommt vor, falls f nach unten beschränkt ist. Ist f nach oben beschränkt, so gibt es eine Zahl λ, so daß $s_f(\lambda) = a$.

Analog kann man der Zahl λ die Elemente

$$[f \leqq \lambda] = s_f'(\lambda), \quad [f \geqq \lambda] = \bar{s}_f(\lambda), \quad [f > \lambda] = \bar{s}'(\lambda)$$

zuordnen. Es gelten:

I. Für $\varrho < \lambda$ $\quad s_f(\varrho) \subseteq s_f'(\varrho) \subseteq s_f(\lambda) \subseteq s_f'(\lambda)$.

II. α) Ist $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$ und $\lim \lambda_n = \lambda > -\infty$, so ist

$$\prod s_f'(\lambda_n) = \lim \operatorname{alg} s_f'(\lambda_n) = \prod s_f(\lambda_n) = \lim \operatorname{alg} s_f(\lambda_n) = s_f'(\lambda).$$

β) Ist $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ und $\lim \lambda_n = \lambda < +\infty$, so ist

$$\sum \dot{+} s_f'(\lambda_n) = \lim \operatorname{alg} s_f'(\lambda_n) = \sum \dot{+} s_f(\lambda_n) = \lim \operatorname{alg} s_f(\lambda_n) = s_f(\lambda).$$

γ) Es ist $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{alg} s_f'(n) = \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{alg} s_f(n) = a,$

$$\lim_{n \to -\infty} \operatorname{alg} s_f'(n) = \lim_{n \to -\infty} \operatorname{alg} s_f(n) = o.$$

Entsprechende Eigenschaften gelten für die komplementären Elemente $\bar{s}_f(\lambda)$ und $\bar{s}_f'(\lambda)$.

Man nennt nach Carathéodory das System der Elemente $\{s_f(\lambda)\}$ bzw. $\{s_f'(\lambda)\}$ für alle λ, die untere bzw. die obere Skala von f. Für beschränkte einfache Ortsfunktionen sind in $\{s_f(\lambda)\}$ bzw. in $\{s_f'(\lambda)\}$ die Elemente o und a enthalten.

Wir nennen jedes von λ abhängige System $\{t(\lambda)\}$ für welche die Relation

(1) $\qquad s_f(\lambda) \subseteq t(\lambda) \subseteq s_f'(\lambda)$ $\qquad$ für alle λ

t, eine Skala von f. Die Skalen von f haben die folgenden charakte-tischen Eigenschaften:

A. Ist $s(\lambda)$ eine Skala von f, so ist 1) für $\varrho < \lambda$ $s(\varrho) \subseteq s(\lambda)$ und $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{alg} s(n) = o$, $\lim\limits_{n \to -\infty} \operatorname{alg} s(n) = o$.

B. Sind $s(\lambda)$ und $t(\lambda)$ zwei Skalen von f, so ist für $\varrho < \lambda$

$$s(\varrho) \subseteq t(\lambda) \quad \text{und} \quad t(\varrho) \subseteq s(\lambda).$$

Nun können wir Skalen mit diesen Eigenschaften einer beliebigen rtsfunktion zuordnen. Es sei $f \in \mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{r}$ die Restklasse, die f definiert, nn gibt es eine Schachtelung $[f_i, g_i]$ von Fundamentalfolgen aus $\mathfrak{r}$. s gilt offenbar

$$s_{f_\nu}(\lambda) \supseteq s_{f_{\nu+1}}(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad s_{g_\nu}(\lambda) \subseteq s_{g_{\nu+1}}(\lambda).$$

s existiert also

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{alg} s_{f_n}(\lambda) = s^*(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \to \infty} \operatorname{alg} s_{g_n}(\lambda) = t^*(\lambda),$$

nd $s^*(\lambda)$ bzw. $t^*(\lambda)$ besitzt die Eigenschaften $A_{1),2)}$. Es gilt außerdem r $s^*(\lambda)$ und $t^*(\lambda)$ die Eigenschaft B. Wir können also $s^*(\lambda)$ und $t^*(\lambda)$ s Skalen derselben Ortsfunktion f betrachten.

Wir wollen jetzt f die obere und untere Skala zuordnen: Es sei eine eliebige Folge von Zahlen $\lambda_1' < \lambda_2' < \ldots$ mit $\lim \lambda_n' = \lambda$, dann setzen wir

$$\lim \operatorname{alg} s^*(\lambda_n') = s_f(\lambda).$$

s sei $\lambda_1'' > \lambda_2'' > \ldots$ mit $\lim \lambda_n'' = \lambda$, dann setzen wir

$$\lim \operatorname{alg} s^*(\lambda_n'') = s_f'(\lambda).$$

an beweist, daß auch

$$\lim \operatorname{alg} t^*(\lambda_n') = s_f(\lambda) \quad \text{und} \quad \lim \operatorname{alg} t^*(\lambda_n'') = s_f'(\lambda)$$

t und zwar $s_f(\lambda)$ und $s_f'(\lambda)$ unabhängig von der Wahl der Schachtelung $_i, g_i]$ und der Folgen $\{\lambda_n'\}$ bzw. $\{\lambda_n''\}$. $s_f(\lambda)$ und $s_f'(\lambda)$ besitzen die Eigen-haften einer Skala und außerdem gilt für jede Skala $t_f(\lambda)$, die man ir f konstruieren kann

$$s_f(\lambda) \subseteq t_f(\lambda) \subseteq s_f'(\lambda).$$

Wir können also $s_f(\lambda)$ bzw. $s_f'(\lambda)$ als untere (bzw. obere) Skala von f etrachten und auch mit $[f < \lambda]$ bzw. $[f \leqq \lambda]$ bezeichnen. Dann kann an das Element $[f > \lambda]$ als $\overline{s}_f'(\lambda)$ und das Element $[f \geqq \lambda]$ als $\overline{s}_f(\lambda)$ estimmen.

Wir sehen also, daß jeder Ortsfunktion $f \in \mathfrak{E}^*$ Skalen zugeordnet ind; unter diesen Skalen gibt es immer eine untere bzw. obere Skala, ie eindeutig bestimmt sind und eventuell identisch sein können.

Erklärt man nun umgekehrt die Skalen durch ihre charakteristischen igenschaften, d. h.:

Eine Skala auf a ist ein System $\{s(\lambda)\}$, *für alle* $-\infty < \lambda < +\infty$ *von Teilelementen des Elementes a mit den Eigenschaften:*

I. *Für* $\varrho < \lambda$ *ist* $s(\varrho) \subseteq s(\lambda)$.

II. *Es ist* $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{alg} s(n) = a$, $\lim\limits_{n \to -\infty} \operatorname{alg} s(n) = o$.

III. *Zwei Skalen* $\{s(\lambda)\}$ *und* $\{t(\lambda)\}$ *auf a heißen äquivalent, wenn für* $\lambda < \mu$ *stets* $s(\lambda) \subseteq t(\mu)$ *und* $t(\lambda) \subseteq s(\mu)$ *gilt,*

führt man die Operationen $\cup, \cap, \pm, \cdot$ zwischen Skalen ein und bildet man dann die Restklassen nach der Äquivalenzrelation III, so hat man eine Menge von Restklassen S^*, die der Menge $\mathfrak{E}^*$ der endlichen Ortsfunktionen isomorph ist.

Die endlichen Ortsfunktionen auf a kann man also nach Carathéodory durch Skalenklassen erklären. Wecken [17]) zieht zur Definition der Ortsfunktionen nur die obere Skala in Betracht, indem er eine Skala („*charakteristische Schar*") durch I, II und:

III*. Ist $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$ mit $\lim \lambda_n = \lambda$, so ist $\lim s(\lambda_n) = s(\lambda)$ erklärt.

§ 7.

Grenzprozesse mit Ortsfunktionen.

Wir wollen zeigen, daß die Operation $\cup$ bzw. $\cap$ für abzählbar viele Elemente $f_1, f_2, \ldots$ in $\mathfrak{E}^*$ stets ausführbar ist, wenn wir für die Folge $f_1, f_2, \ldots$ Beschränktheit in $\mathfrak{E}^*$ fordern.

Wir zeigen zuerst

Satz 1. *Es seien* $f_1, f_2, \ldots$ *Elemente aus* $\mathfrak{E}' < \mathfrak{E}^*$ *mit* $f_\nu \leqq f_{\nu+1}$ *und* $0 \leqq f_\nu \leqq g$, *wobei* $g \in \mathfrak{E}'$, *für* $\nu = 1, 2, \ldots$, *dann gibt es ein Ortsfunktion* $f \in \mathfrak{E}^*$, *so daß* $f = \cup f_\nu$ *ist.*

Beweis. Wir bilden die Elemente $[f_i < \lambda] = s_i(\lambda)$, $[f_i \geqq \lambda] = \bar{s}_i(\lambda)$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ und $[g < \lambda] = t(\lambda)$, $[g \geqq \lambda] = \bar{t}(\lambda)$. Dann gilt offenbar beim festen λ:

$$(1) \qquad s_1 \supseteq s_2 \supseteq \ldots \supseteq t \text{ bzw. } \bar{s}_1 \subseteq \bar{s}_2 \subseteq \ldots \subseteq \bar{t}$$

und weil $s_i + \bar{s}_i = a$, $s_i \bar{s}_i = o$ ist, so haben wir

$$(1') \qquad s = \lim \operatorname{alg} s_i = \prod s_i \text{ bzw. } \bar{s} = \lim \operatorname{alg} \bar{s}_i = \sum + s_i \text{ mit}$$
$$s + \bar{s} = a, \; s\bar{s} = o; \; s \supseteq t, \; \bar{s} \subseteq \bar{t}$$

und weil die Folge nach oben beschränkt ist, so gibt es λ, so daß $s(\lambda)$ nicht leer. Wir setzen

$$(2) \qquad a_{mn} = \bar{s}\left(\frac{m}{2^n}\right) s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \qquad \text{für alle } m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dann ist

$$(3) \qquad a = a_{0n} + a_{1n} + a_{2n} + \cdots \qquad \text{mit } a_{in}\, a_{jn} = o \text{ für alle } i \neq$$

[17]) Wecken, Zit. 15.

enn es ist

$$a = \sum_{m=0}^{\infty} + s\left(\frac{m}{2^n}\right) \quad \text{mit } s\left(\frac{m}{2^n}\right) \subseteq s\left(\frac{m+1}{2^n}\right)$$

so

$$a = \sum_{m=1}^{\infty} \left(s\left(\frac{m}{2^n}\right) - s\left(\frac{m-1}{2^n}\right)\right) = \sum s\left(\frac{m}{2^n}\right) \bar{s}\left(\frac{m-1}{2^n}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1,\,n}$$

d die Summanden sind, wie leicht ersichtlich, paarweise fremd. Nun betrachten wir die einfachen Ortsfunktionen

$$h'_n = S^*\left(a_{mn} \to \frac{m}{2^n}\right) \quad \text{bzw.} \quad h''_n = S^*\left(a_{mn} \to \frac{m+1}{2^n}\right).$$

Es gilt offenbar $h'_n \leqq h''_n$. Wir behaupten: Es gilt außerdem

$$h'_n \leqq h'_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad h''_n \geqq h''_{n+1}.$$

Es ist nämlich

$$h'_{n+1} - h'_n = \underset{m,\,\mu}{S^*}\left(a_{mn}\, a_{\mu,\,n+1} \to \frac{\mu}{2^{n+1}} - \frac{m}{2^n}\right).$$

$\frac{\mu}{2^{n+1}} - \frac{m}{2^n} \leqq 0$, also $\mu < 2m$, so ist $a_{mn}\, a_{\mu,\,n+1}$ leer, d. h. Kombinationen von m, μ mit $\mu < 2m$ kommen in (5) nicht vor, die Ortsfunktion (5) ist $\geqq 0$. Denn wir haben für $\mu < 2m$

$$\frac{\mu+1}{2^{n+1}} \leqq \frac{m}{2^n} \text{ also } \frac{\mu}{2^{n+1}} < \frac{\mu+1}{2^{n+1}} \leqq \frac{m}{2^n} < \frac{m+1}{2^n}$$

d daher

$$s\left(\frac{\mu}{2^{n+1}}\right) \subset s\left(\frac{\mu+1}{2^{n+1}}\right) \subseteq s\left(\frac{m}{2^n}\right) \subset s\left(\frac{m+1}{2^n}\right).$$

lso

$$a_{mn} = \bar{s}\left(\frac{m}{2^n}\right) s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) - s\left(\frac{m}{2^n}\right) \text{ und}$$

$$a_{\mu,\,n+1} = \bar{s}\left(\frac{\mu}{2^{n+1}}\right) s\left(\frac{\mu+1}{2^{n+1}}\right) = s\left(\frac{\mu+1}{2^{n+1}}\right) - s\left(\frac{\mu}{2^{n+1}}\right)$$

nd zueinander fremd. Die erste Ungleichung in (4) ist damit bewiesen. Analog beweist man $h''_n \geqq h''_{n+1}$. Da außerdem $\lim (h''_n - h'_n) = 0$, ist $[h'_n, h''_n]$ eine Schachtelung in $\mathfrak{E}'$, sie erklärt ein $f \in \mathfrak{E}^*$ und es gilt

$$\lim h'_n = \lim h''_n = f.$$

un behaupten wir: Es ist $f = f_1 \cup f_2 \cup \ldots = \cup f_\nu$. Denn es ist stens $f \geqq f_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots$, da $f_i < \frac{m+1}{2^n}$ auf $s\left(\frac{m+1}{2^n}\right)$ und emgemäß auf a_{mn} für alle $m = 0, 1, \ldots$ gilt, also $h''_n > f_i$ für alle $= 1, 2, \ldots$, d. h. $f \geqq f_i$. Zweitens folgt $f^* \geqq f$ aus $f^* \geqq f_i$ $f^* \in \mathfrak{E}^*$ r alle $i = 1, 2, \ldots$, denn für sehr große μ ist sicher

$$[f_\mu \geqq h'_n] = \sum s_\mu\left(\frac{m}{2^n}\right) s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \text{ nicht leer}$$

nd es gilt $[f_{\mu+1} \geqq h'_n] \supset [f_\mu \geqq h'_n]$ und weil $f^* \geqq f_\mu$ für alle μ gilt, so sicher $[f^* \geqq h'_n] \supseteq \lim\limits_{\mu \to \infty} \operatorname{alg} [f_\mu \geqq h'_n] = \sum s\left(\frac{m}{2^n}\right) s\left(\frac{m+1}{2^n}\right) = \sum a_{mn} = a.$

lso $f^* \geqq h'_n$ für alle n, d. h. $f^* \geqq f$. Der Satz ist also damit bewiesen.

Der Satz gilt auch, falls wir nicht voraussetzen, daß alle $f_i \geqq 0$. Ma kann ihn ferner für beliebige nach oben beschränkte nicht abnehmend Folgen von allgemeinen Ortsfunktionen aus $\mathfrak{E}^*$, durch Approximatio mit einfachen Ortsfunktionen, beweisen. Einen entsprechenden Sa kann man für nicht zunehmende nach unten beschränkte Folgen zuer von einfachen und dann von allgemeinen Ortsfunktionen beweise Wir formulieren also allgemein den Satz folgendermaßen:

Satz 2. *Für nicht abnehmende (b w. nicht zunehmende) nac oben (bzw. nach unten) beschränkte Folgen $f_1, f_2, \ldots$ von Elemente aus $\mathfrak{E}^*$ existiert $\cup f_\nu$ (bzw. $\cap f_\nu$) stets in $\mathfrak{E}^*$.*

Jetzt beweist man

Satz 3. *Für jede nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Folg $f_1, f_2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{E}^*$ existiert $\cup f_i$ (bzw. $\cap f_i$) in $\mathfrak{E}^*$.*

Wir setzen nämlich $g'_\nu = \overset{\nu}{\underset{n=1}{\cup}} f_n$ bzw. $g''_\nu = \overset{\nu}{\underset{n=1}{\cap}} f_n$; dann existie nach Satz 2 $\underset{\nu}{\cup} g'_\nu$ bzw. $\underset{\nu}{\cap} g''_\nu$ und es ist gleich $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} f_n$ bzw. $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cap}} f_n$ w. z. b. w

Es gelten weiter für nicht abnehmende nach oben beschränkt Folgen $f_1, f_2, \ldots$ bzw. $g_1, g_2, \ldots$ von Elementen aus $\mathfrak{E}^*$

I. $\cup f_\nu + \cup g_\nu = \cup (f_\nu + g_\nu)$

II. $\cup f_\nu \cup g_\nu = \cup (f_\nu g_\nu)$ falls $g_\nu \geqq 0$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$

III. $\cup f_\nu \cup \cup g_\nu = \cup (f_\nu \cup g_\nu)$

IV. $\cup f_\nu \cap \cup g_\nu = \cup (f_\nu \cap g_\nu)$.

Entsprechendes gilt, falls diese Folgen nicht zunehmend nach unte beschränkt sind.

Die Konvergenz, die wir durch Def. α § 5 für Folgen von Ort funktionen eingeführt haben, entspricht der gleichmäßigen Konvergen der Folgen von Punktfunktionen. Aber für Folgen von Punktfunk tionen wird bekanntlich auch eine gewöhnliche Konvergenz erklär also eine Konvergenz der Werte der Funktionen in einem Punkt un dann in dem ganzen Definitionsbereich. Mit Hilfe der Sätze dieses können wir eine Konvergenz in $\mathfrak{E}^*$ einführen, die der gewöhnliche Konvergens von Punktfunktionen entspricht. Wir nennen diese Kon vergenz algebraisch.

Es sei $f_1, f_2, \ldots$ eine beschänkte Folge von Ortsfunktionen aus $\mathfrak{E}^*$ dann setzen wir

$$g'_\nu = f_\nu \cup f_{\nu+1} \cup \ldots, \qquad g''_\nu = f_\nu \cap f_{\nu+1} \cap \ldots.$$

die nach Satz 3 existieren, so daß gilt:

$$g'_\nu \geqq g'_{\nu+1}, \quad g''_\nu \leqq g''_{\nu+1} \qquad \text{für alle } \nu = 1, 2, \ldots$$

Die Folgen $g'_1, g'_2, \ldots$ und $g''_1, g''_2, \ldots$ sind außerdem beschränkt. E existieren nach Satz 1 also $\cap g'_\nu$ bzw. $\cup g''_\nu$. Nun definieren wir

$$\lim_{n\to\infty} \text{alg}\, f_n = \cap g'_\nu = f \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \text{alg}\, f_n = \cup g''_n$$

s oberen (bzw. unteren) algebraischen Limes der Folge $f_2, \ldots$. Ist $f = \underline{f} = f$, so sagen wir, daß die Folge $f_1, f_2, \ldots$ gebraisch konvergiert und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{alg} f_n = f.$$

Eine Folge, die algebraisch konvergiert, braucht nicht immer eine ndamentalfolge zu sein.

Beispiel. Wir betrachten eine Zerlegung

$$a = a_1 + a_2 + \cdots$$

id definieren eine Folge von Ortsfunktionen

$= S(a_i \to \alpha_{in})$ für alle $n = 1, 2, \ldots$, wobei $\alpha_{in} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \leqq n \\ 1 & \text{für } i > n. \end{cases}$

e Folge $f_1, f_2, \ldots$ ist algebraisch konvergent, denn $f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq 0$ also $\operatorname{alg} f_n = \overline{\lim}\operatorname{alg} f_n = \lim \operatorname{alg} f_n = \bigcap f_\nu$ und zwar $\bigcap f_\nu = 0$, denn es gilt erst $f_\nu \geqq 0$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$. Ist außerdem $g \leqq f_\nu$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$, muß $g \leqq 0$ also $[g > 0]$ leer. Wäre nämlich $[g > 0] = b \subseteq a$ und b cht leer, so gäbe es mindestens ein $a_n b \neq o$ also für die Ortsfunktion die auf a_n gleich Null ist, wäre dann $[g > f_n] = o]$ (Widerspruch!). e Folge $f_1, f_2, \ldots$ ist aber keine Fundamentalfolge, denn zu beliebigem $< \varepsilon < 1$ können wir keine natürliche Zahl n bestimmen, so daß $|f_n - f_{n+\nu}| < \varepsilon$ t. Wir haben nämlich $f_n = 1$ und $f_{n+\nu} = 0$ auf a_{n+1} für alle $\nu = 1, 2, \ldots$, so $|f_n - f_{n+\nu}| = 1$ und dies gilt für beliebiges n.

(F): Ist $\{f_i\}$ irgendeine Fundamentalfolge aus $\mathfrak{E}^*$, so konvergiert e offensichtlich auch algebraisch und es gilt: $\lim \operatorname{alg} f_n = \lim f_n$.

(O): Es seien $f_1, f_2, \ldots$ bzw. $g_1, g_2, \ldots$ beliebige algebraisch konrgente Folgen aus $\mathfrak{E}^*$, dann gelten [18]):

1) $\lim \operatorname{alg} f_n \pm \lim \operatorname{alg} g_n = \lim \operatorname{alg} (f_n \pm g_n)$.

2) $\lim \operatorname{alg} f_n \cup \text{ oder } \cap \lim \operatorname{alg} g_n = \lim \operatorname{alg} (f_n \cup \text{ oder } \cap g_n)$.

3) $\lim \operatorname{alg} f_n \,.\, \lim \operatorname{alg} g_n = \lim \operatorname{alg} (f_n g_n)$.

nd also $\{f_i\}$ und $\{g_i\}$ beliebige Fundamentalfolgen, so existiert stets egen (F) und (O_3) $\lim \operatorname{alg} f_n g_n$ in $\mathfrak{E}^*$. Wir können also die Produktldung in $\mathfrak{E}^*$ folgendermaßen erklären: Es seien $f, g \in \mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$ e Klasse in $\mathfrak{M}$, die f bzw. g definiert. Wir wählen eine beliebige ndamentalfolge $\{f_i\}$ in $\mathfrak{r}$ bzw. $\{g_i\}$ in $\mathfrak{r}'$, dann existiert $\operatorname{alg}\lim f_n g_n$ $\mathfrak{E}^*$. Wir definieren daher: $f \,.\, g = \lim \operatorname{alg} f_n g_n$. Das so definierte odukt ist unabhängig von der Wahl der Folge $\{f_i\}$ in $\mathfrak{r}$ bzw. $\{g_i\}$ $\mathfrak{r}'$ und steht nicht im Widerspruch zu dem schon für gleichmäßig schränkte Folgen $\{f_i\}$ und $\{g_i\}$ in § 5 definierten Produkt. Außer-

[18]) CRF. II, § 108 und 115.

dem ändert sich nicht das Resultat der übrigen in § 5 definierte Operationen, wenn wir sie auch durch:

$f \pm g = \lim \operatorname{alg} (f_n \pm g_n)$, $f \cup$ oder $\cap g = \lim \operatorname{alg} (f_n \cup$ oder $\cap g$

erklären. —

Wir erwähnen, daß der bekannte Satz von Egoroff für algebraisch konvergente Folgen in $\mathfrak{E}^*$ gilt und sich auf Grund unserer Definitio der Ortsfunktionen leicht beweisen läßt. Er lautet hier:

Satz von Egoroff. Eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ aus $\mathfrak{E}^*$ ist dann un nur dann algebraisch konvergent, wenn es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ e $x \subseteq a$ mit $\varphi(\alpha + x) < \varepsilon$ gibt, so daß $f_1, f_2, \ldots$ als Ortsfunktionen auf betrachtet, eine Fundamentalfolge bilden.

Zusätze bei der Korrektur (Dezember 1948).

Bemerkung 1. Die Arbeit wurde 1945 abgeschlossen; aber di Verhältnisse hinderten eine frühere Veröffentlichung. Da ausländisch Literatur seinerzeit mir nicht zugänglich war, konnte ich sie nic berücksichtigen. Neuerdings wurde ich mit zwei Arbeiten bekannt, di sich mit der Definition der Ortsfunktionen beschäftigen*).

Bemerkung 2. Die Voraussetzung, die wir in § 5 machen, da nämlich die vollkommene Boolesche Algebra (σ-Boolesche Algebra) e reduziertes Maß trägt, ist in der weiteren Entwicklung der Theori mit Ausnahme des Satzes von Egoroff, nicht benutzt, so daß die Theorie für beliebige σ-Boolesche Algebren gilt.

Bemerkung 3. Bildet man durch die Schränkungstransformatio $\sigma(\alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$ die Elemente von $\mathfrak{E}'$ in einem bezüglich $\leqq$, und den entsprechend, $\cap$ und $\cup$ isomorphen Verband $\sigma\mathfrak{E}'$, dessen Element durch $\sigma f = S(a_i \to \sigma(\alpha_i))$ gegeben sind, bezeichnet man weiter als ein *Fundamentalfolge im weiteren Sinne* jede Folge $\{f_\nu\}$ aus $\mathfrak{E}'$, für d $\{\sigma f_\nu\}$ eine Fundamentalfolge ist und bezeichnet man schließlich m $\mathfrak{M}_\infty$ die Gesamtheit der Fundamentalfolgen im weiteren Sinne, so i $\mathfrak{M}_\infty$ ein Oberverband von $\mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M}_\infty \; \mathfrak{N} = \mathfrak{E}^*_\infty$ ein Oberverband von $\mathfrak{E}$ In $\mathfrak{E}^*_\infty$ sind aber nicht alle Ortsfunktionen endlich. Die in dieser Weis aus den endlichen einfachen Ortsfunktionen erfolgende Konstruktio des Verbandes aller allgemeinen Ortsfunktionen, also $\mathfrak{E}^*_\infty$, erleichte die Erklärung der Operationen $\cap, \cup, +, \cdot$ in $\mathfrak{E}^*_\infty$ mit Hilfe von Repräse tanten in $\mathfrak{M}_\infty$. $\mathfrak{E}^*_\infty$ ist isomorph zu dem Verband von Ortsfunktionen, de man durch Somenskalen nach Carathéodory durch geeignete Änderun der Endlichkeitsbedingung II § 6 dieser Arbeit oder nach Gomes erklär

*) Olmsted, Lebesgue Theory on a Boolean Algebra, Trans. Am. Math. Soc. (1942) 164—193 und A. P. Gomes; Noção de funcional em espaços sem pontos, Por 1946. Dort werden die Ortsfunktionen nicht durch Treppenfunktionen, sonde durch Somenskalen erklärt.

(Eingegangen am 5. April 1947.)

SITZUNGSBERICHTE

der Heidelberger Akademie der Wissenschaften

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

Jahrgang 1948

1. Abhandlung: Dozent Dr. P. Christian und Dr. R. Haas. Über ein Farbenphänomen. 28 Seiten. M 1.50

2. Abhandlung: Professor Dr. W. Blaschke. Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel. 9 Seiten. M 1.—

3. Abhandlung: Professor Dr. P. Uhlenhuth. Entwicklung und Ergebnisse der Chemotherapie. 37 Seiten. M 2.—

4. Abhandlung: Dozent Dr. P. Christian. Die Willkürbewegung im Umgang mit beweglichen Mechanismen. Mit 5 Textabbildungen. 28 Seiten. M 1.50

5. Abhandlung: Professor Dr. W. Bothe. Der Streufehler bei der Ausmessung von Nebelkammerbahnen im Magnetfeld. 14 Seiten. M 1.—

6. Abhandlung: Professor Dr. W. Troll. Urbild und Ursache in der Biologie. 26 Seiten. M 1.50

In Kürze erscheinen:

7. Abhandlung: Professor Dr. H. Wendt. Jansen-Rayleighsche Näherung zur Berechnung von Unterschallströmungen. Etwa M 2.—

8. Abhandlung: Professor Dr. K. H. Schubert. Über die Entwicklung zulässiger Funktionen nach den Eigenfunktionen bei definiten, selbstadjungierten Eigenwertaufgaben. Etwa M 2.—

9. Abhandlung: Studienrat Dr. W. Schaaff. Biegung mit Erhaltung konjugierter Systeme. Etwa M 2.—

10. Abhandlung: Professor Dr. A. Seybold und Dr. Dr. H. Mehner. Über den Gehalt von Vitamin C in Pflanzen. Etwa M 7.50

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einführung in die Atomphysik

Von

Prof. Dr. **W. Finkelnburg**

Mit 193 Abbildungen. VIII, 339 Seiten. 1948.

M 28.—

Inhaltsübersicht

I. Einleitung.
II. Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne.
III. Atomspektren und Atombau.
IV. Die quantenmechanische Atomtheorie.
V. Die Physik der Atomkerne.
VI. Physik der Moleküle.
VII. Der flüssige und feste Zustand der Materie vom Standpunkt der Atomphysik.

INGENIEUR-ARCHIV

Unter Mitwirkung von

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

Herausgegeben von

R. GRAMMEL

Erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 30—40 Bogen vereinigt werden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany